

Câu 1: (5 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2y) + 2f(y^2) = (x^2 + f(y)) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2: (5 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$x_1 = a \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \frac{(2x_n + 3)^{2024}}{2024} + x_n, \forall n \geq 1.$$

a) Cho $a \geq -\frac{3}{2}$, đặt $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 3)^{2023}}{2x_{i+1} + 3}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số thực a để (x_n) là dãy số khác hằng và hội tụ.

Câu 3: (5 điểm). Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Đường thẳng EF cắt BC tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt CH, BH lần lượt tại P, Q . Đường thẳng AH cắt (O) tại T khác A . Đường thẳng qua H vuông góc với EF cắt BC tại L .

a) Chứng minh LT tiếp xúc với đường tròn (HPQ) .

b) Dựng đường kính AA' của (O) . Đường thẳng qua L vuông góc với BC cắt $A'B, A'C$ lần lượt tại Y, Z . Chứng minh rằng đường tròn $(A'YZ)$ tiếp xúc với đường tròn (HPQ) .

Câu 4: (5 điểm).

Cho $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ là 6 số tự nhiên không vượt quá 20. Gọi m là trung bình cộng của 6 số đã cho. Hai số được gọi là một “cặp số đẹp” nếu như trung bình cộng chúng lớn hơn m .

a) Chứng minh rằng không thể chia 6 số đã cho thành 3 cặp đều là các “cặp số đẹp”.

b) Trong 6 số đã cho, có thể có nhiều nhất bao nhiêu “cặp số đẹp”?

-----**HẾT**-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Hướng dẫn chấm thi gồm 05 trang)

I. Hướng dẫn chung

- Thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ điểm số từng phần như *Hướng dẫn chấm thi* quy định Tổ chấm thảo luận và thống nhất thang điểm chấm cho những bài có cách giải khác với đáp án trong *Hướng dẫn chấm thi* và ghi thành biên bản chấm thi.
- Việc chi tiết hóa điểm số trong từng câu (nếu có) trong *Hướng dẫn chấm thi* thì phải bảo đảm không làm sai lệch *Hướng dẫn chấm thi* và phải được thống nhất thông qua biên bản của Tổ chấm.
- Điểm từng câu và toàn bài không làm tròn (tính đến 0,25 điểm).

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5 điểm)	Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x^2y) + 2f(y^2) = (x^2 + f(y)).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$	
	Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi $P(u, v)$ là phép thế x bởi u và y bởi v vào phương trình (1). Ta có $P(0; 0) \Rightarrow 3f(0) = f^2(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$	0,5
	Nếu $f(0) = 3$ thì $P(x; 0) \Rightarrow 3 + 6 = (x^2 + 3)3, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $x^2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (vô lý). Do đó ta có $f(0) = 0$.	0,5
	Tiếp theo : $P(0; y) \Rightarrow 2f(y^2) = f^2(y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (2)$ $P(0; -y) \Rightarrow 2f(y^2) = f^2(-y), \forall y \in \mathbb{R} \quad (3)$ $(1), (2) \Rightarrow f(x^2y) = x^2f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (4)$	0,5
	$P(x; 1) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} f(x^2) = x^2f(1) \quad (5)$	0,5
	Trong (2), thay $y = 1: 2f(1) = f^2(1) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases}$	0,5

	$\text{TH1: Nếu } f(1) = 0 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} f(x^2) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ Thử lại thỏa mãn (1).	0,5
	$\text{TH2: Nếu } f(1) = 2 \stackrel{(5)}{\Rightarrow} f(x^2) = 2x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (6a)$ Trong (4), thay $y = -1$: $f(-x^2) = x^2 f(-1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (7)$	0,5
	Trong (2), thay $y = -1$: $f^2(-1) = 2f(1) = 4 \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$	0,5
	$+ \text{ Nếu } f(-1) = 2 \stackrel{(7)}{\Rightarrow} f(-x^2) = 2x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (6b)$ Kết hợp (6a) và (6b) ta được $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn (1).	0,5
	$+ \text{ Nếu } f(-1) = -2 \stackrel{(7)}{\Rightarrow} f(-x^2) = -2x^2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (6c)$	
	Kết hợp (6a) và (6c) ta được $f(x) = 2 x , \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn (1). Vậy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = 2 x , \forall x \in \mathbb{R}$	0,5
Câu 2: (5 điểm)	Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = a \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \frac{(2x_n + 3)^{2024}}{2024} + x_n, \forall n \geq 1.$ a) Cho $a \geq -\frac{3}{2}$, đặt $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 3)^{2023}}{2x_{i+1} + 3}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn của dãy số (u_n) . b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số thực a để (x_n) là dãy số khác hằng và hội tụ.	
	a) Giả thiết được viết lại thành $(2x_{n+1} + 3) = \frac{(2x_n + 3)^{2024}}{1012} + (2x_n + 3), \forall n \geq 1 \quad (*)$ Do $x_1 = a > -\frac{3}{2}$ nên bằng quy nạp, ta chỉ ra được dãy (x_n) tăng.	0,5
	Nếu (x_n) bị chặn trên thì nó sẽ hội tụ về $L > 1$, thay vào công thức, ta có $L = \frac{(2L + 3)^{2024}}{1012} + L.$ Giải ra được $L = -\frac{3}{2}$, điều này vô lý. Suy ra dãy (x_n) không bị chặn trên hay $\lim x_n = +\infty$.	0,5
	Từ $(*)$, ta còn có: $(2x_{n+1} + 3) = \frac{(2x_n + 3)^{2024}}{1012} + (2x_n + 3), \forall n \geq 1$ $\Leftrightarrow 1012 \left[(2x_{n+1} + 3) - (2x_n + 3) \right] = (2x_n + 3)^{2024}, \forall n \geq 1$	1,0

	$\Leftrightarrow 1012 \left[\frac{1}{2x_n + 3} - \frac{1}{2x_{n+1} + 3} \right] = \frac{(2x_n + 3)^{2023}}{2x_{n+1} + 3}, \forall n \geq 1.$	
	Suy ra $u_n = 1012 \left(\frac{1}{2x_1 + 3} - \frac{1}{2x_{n+1} + 3} \right) = \frac{1012}{2a + 3} - \frac{1012}{2x_{n+1} + 3}, \forall n \geq 1.$ Suy ra $\lim u_n = \frac{1012}{2a + 3}.$	0,5
	b) Đặt $y_n = 2x_n + 3$, từ (*) ta có $y_{n+1} = \frac{y_n^{2024}}{1012} + y_n, \forall n \geq 1. (**)$ Bài toán trở thành tìm $y_1 = 2a + 3 = b$ để (y_n) hội tụ. Dễ thấy nếu $y_1 = b \neq 0$ thì y_n tăng và nếu nó có giới hạn là L thì ta có $L = \frac{L^{2024}}{1012} + L \Leftrightarrow L = 0.$ Do đó, trước hết, ta cần có $b \leq 0.$	1,0
	Mặt khác, nếu chọn $y_1 = b \in (-1; 0)$ thì $\frac{b^{2023}}{1012} > -1.$ Suy ra $y_2 = b \left(\frac{b^{2023}}{1012} + 1 \right) \in (-1; 0).$	0,5
	Dùng quy nạp, ta chứng minh được rằng $y_n \in (-1; 0), \forall n \geq 1.$	0,5
	Suy ra dãy (y_n) tăng và bị chặn trên nên nó sẽ hội tụ về 0. Vì vậy với mọi $a \in \left(-2; -\frac{3}{2} \right)$ thì dãy (x_n) là dãy số khác hằng và hội tụ. Chứng minh hoàn tất.	0,5
Câu 3: (5 điểm)	Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt BC tại K. Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt CH, BH lần lượt tại P, Q. Đường thẳng AH cắt (O) tại T khác A. Đường thẳng qua H vuông góc với EF cắt BC tại L. a) Chứng minh LT tiếp xúc với đường tròn (HPQ). b) Dụng đường kính AA' của (O). Đường thẳng qua L vuông góc với BC cắt $A'B, A'C$ lần lượt tại Y, Z. Chứng minh rằng đường tròn $(A'YZ)$ tiếp xúc với đường tròn (HPQ).	

	Không mất tính tổng quát ta giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_6$ a) Giả sử tồn tại cách chia mà cả ba cặp đều là cặp số đẹp và gọi trung bình cộng của ba cặp đó là S_1, S_2, S_3 Ta có $S_1, S_2, S_3 > m$ nên $S_1 + S_2 + S_3 > 3m$ Suy ra $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_6}{2} > 3 \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_6}{6} \right)$ (Vô lí) Vậy a) đã được chứng minh.	1,0
	b) Ta có các nhận xét sau: +) Cặp số $(a_1; a_2)$ không phải cặp số đẹp. Thật vậy: $\begin{cases} 3a_1 < a_1 + a_2 + a_3 \\ 3a_2 < a_4 + a_5 + a_6 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = m$	0,5
	+) Tương tự các cặp số: $(a_1; a_3)$ và $(a_1; a_4)$ cũng không phải cặp số đẹp. Suy ra có không quá 12 cặp số đẹp.	0,5
	+ Mặt khác từ câu a) ta có các kết luận dưới đây: Trong 3 cặp $(a_1; a_6); (a_2; a_5)$ và $(a_3; a_4)$ phải có ít nhất một cặp không là cặp số đẹp.	1,0
	Trong 3 cặp $(a_1; a_5); (a_2; a_3)$, và $(a_4; a_6)$ phải có ít nhất một cặp không là cặp số đẹp. Suy ra có không quá 10 cặp số đẹp.	1,0
	+) Ngoài ra xét tập $A = \{0, 16, 17, 18, 19, 20\}$. Ta có $m = 15$ và có 10 cặp số đẹp là: $(16, 17), (16, 18), (16, 19), (16, 20), (17, 18), (17, 19), (17, 20), (18, 19), (18, 20)$ và $(19, 20)$, Vậy có nhiều nhất 10 cặp số đẹp.	1,0

-----HẾT-----