

Lời giải tham khảo

đề thi chuyên Toán TP Đà Nẵng năm 2021

Nguyễn Đức Toàn - Sơn Nguyễn - Khang Nguyễn - Hà Huy Khôi

1 Câu 1

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} + \frac{10x+3\sqrt{x}-7}{x+3\sqrt{x}+2} - \frac{x-2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$. Rút gọn biểu thức P và chứng minh rằng

$$-\frac{1}{2} \leq P \leq 4.$$

2. Chứng minh rằng với các số thực dương x, y bất kì thỏa mãn $xy > 2021x + 2022y$, ta luôn có

$$(\sqrt{2022} - \sqrt{2021})\sqrt{x+y} > 1.$$

Lời giải:

1. Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x\sqrt{x}-8}{x-4} + \frac{10x+3\sqrt{x}-7}{x+3\sqrt{x}+2} - \frac{x-2}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x+2}{\sqrt{x}+2} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{(10\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{x-2}{\sqrt{x}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+2} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+4+10\sqrt{x}-7-x+2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+2} \\ &= \frac{12\sqrt{x}-1}{x+2} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{12\sqrt{x}-1}{x+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$. Ta có:

$$\bullet P + \frac{1}{2} = \frac{x+24\sqrt{x}}{2(x+2)}$$

$$\text{Do } x \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} x+24\sqrt{x} & \geq 0 \\ 2(x+2) & \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+24\sqrt{x}}{2(x+2)} \geq 0.$$

$$\text{Suy ra } P \geq -\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

- $P - 4 = -\frac{(2\sqrt{x} - 3)^2}{x + 2} \leq 0$ (Do $x \geq 0$ nên $x + 2 > 0$).
Suy ra $P \geq 4$.
Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{9}{4}$.

2. Theo giả thiết, ta có $x, y > 0$ và

$$xy > 2021x + 2022y$$

Từ đó suy ra

$$1 > \frac{2021}{y} + \frac{2022}{x}$$

Từ điều trên, kết hợp với bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} &= \sqrt{x+y} \cdot 1 \\ &> \sqrt{x+y} \sqrt{\frac{2022}{x} + \frac{2021}{y}} \\ &\geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{2022}{x}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{2021}{y}} \\ &= \sqrt{2022} + \sqrt{2021}\end{aligned}$$

Do $\sqrt{2022} - \sqrt{2021} > 0$ nên

$$(\sqrt{2022} - \sqrt{2021})\sqrt{x+y} > (\sqrt{2022} - \sqrt{2021})(\sqrt{2022} + \sqrt{2021}) = 1$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2 Câu 2

Trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = \frac{1}{8}x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 2$. Khi k thay đổi, chứng minh rằng (d) luôn đi qua điểm A cố định và cắt (P) tại hai điểm phân biệt B và C thỏa mãn $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{OA}$, với O là gốc tọa độ.

Lời giải:

Trước hết, ta chứng minh (d) luôn đi qua điểm A cố định. Thật vậy, ta có:

$$y = kx + 2 \Leftrightarrow kx + (2 - y) = 0$$

Phương trình này có nghiệm $\forall k$ nên suy ra $\begin{cases} x = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy d luôn đi qua $A(0;2)$ cố định.

Xét phương trình hoành độ giao của (d) và (P) :

$$\frac{1}{8}x^2 = kx + 2 \Leftrightarrow x^2 - 8kx - 16 = 0$$

Phương trình này có $\Delta' = (4k)^2 + 16 = 16(k^2 + 1) > 0$. suy ra phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt hay (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Ta có $B(x_b; y_b)$ và $C(x_c; y_c)$ là giao điểm của (d) và (P) nên x_b, x_c là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 8kx - 16 = 0$. Theo hệ thức Viète, ta suy ra:

$$\begin{cases} x_b + x_c = 8k \\ x_b \cdot x_c = -16 \end{cases}$$

Ta có:

$$AB = \sqrt{x_b^2 + (y_b - 2)^2} = \sqrt{x_b^2 + \left(\frac{x_b^2}{8} - 2\right)^2} = \sqrt{x_b^2 + (kx_b)^2} = \sqrt{x_b^2(k^2 + 1)}$$

Tương tự, ta suy ra:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_b^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_c^2}} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{x_b^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_c^2}} \right)^2 &= \frac{1}{x_b^2} + \frac{1}{x_c^2} + \frac{2}{\sqrt{(x_b \cdot x_c)^2}} \\ &= \frac{x_b^2 + x_c^2}{(x_b \cdot x_c)^2} + \frac{2}{\sqrt{(x_b \cdot x_c)^2}} \\ &= \frac{(x_b + x_c)^2 - 2x_b \cdot x_c}{(x_b \cdot x_c)^2} + \frac{2}{\sqrt{(x_b \cdot x_c)^2}} \\ &= \frac{64k^2 + 32}{256} + \frac{2}{16} \\ &= \frac{k^2 + 1}{4} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_b^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_c^2}} = \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{k^2+1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Vì $A(0;2)$ nên $OA = 2 \Rightarrow \frac{1}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$. Ta hoàn thành chứng minh.

3 Câu 3

1. Giải phương trình

$$2x^3 + 5x^2 - 2x + 2\sqrt{10x^5 - 4x^4} = 32x(3-x)^3. \quad (1)$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1}+1)^2 + 2x + 2 = (\sqrt{y-1}+1)^2 + 2\sqrt{xy+y-x-1} \\ x^2 - y + \frac{8}{\sqrt{2xy-5x-y+2}} = 4 \end{cases}$$

Lời giải:

1. Bài này chủ yếu đánh lừa học sinh.

Nếu $x = 0$ thì rõ ràng đó là một nghiệm phương trình. Xét $x \neq 0$.

Điều kiện. $x \geq \frac{2}{5}$.

Chú ý rằng $2\sqrt{10x^5 - 4x^4} = 2x^2\sqrt{2(5x-2)}$, ta viết phương trình lại thành

$$x \left[(32x^3 - 286x^2 + 869x - 866) + 2x\sqrt{2(5x-2)} \right] = 0$$

$$\Rightarrow (32x^3 - 286x^2 + 869x - 866) + 2x\sqrt{2(5x-2)} = 0$$

(vì $x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (32x^3 - 286x^2 + 869x - 866 + 16) + 2\{x\sqrt{2(5x-2)} - 8\} = 0,$$

hay là

$$(x-2) \left[32x^2 - 222x + 425 + \frac{4(5x^2 + 8x + 16)}{x\sqrt{2(5x-2)} + 8} \right] = 0.$$

Rõ ràng biểu thức trong ngoặc vuông vô nghiệm, từ đó $x = 2$, thỏa mãn

Vậy $S = \{0, 2\}$.

2. Hệ phương trình:

$$(I) \begin{cases} (\sqrt{x+1}+1)^2 + 2x + 2 = (\sqrt{y-1}+1)^2 + 2\sqrt{xy+y-x-1} & (1) \\ x^2 - y + \frac{8}{\sqrt{2xy-5x-y+2}} = 4 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: (*) $\begin{cases} x \geq -1, y \geq 1 \\ 2xy - 5x - y + 2 > 0 \end{cases}$ Đặt $a = \sqrt{x+1} \geq 0, b = \sqrt{y-1} \geq 0$.

Thay a, b vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} (a+1)^2 + 2a^2 &= (b+1)^2 + 2ab \\ \Leftrightarrow (a+1)^2 - (b+1)^2 + 2a^2 - 2ab &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(3a+b+2a) &= 0 \\ \Leftrightarrow a-b &= 0 \text{ (Do } 3a+b+2 \geq 2 > 0) \\ \Leftrightarrow a &= b \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} &= \sqrt{y-1} \\ \Leftrightarrow x+2 &= y \text{ (} x \geq -1, y \geq 1) \end{aligned}$$

Thay $y = x + 2$ vào phương trình (2), ta được:

$$\begin{aligned} x^2 - x + \frac{8}{\sqrt{2x^2 - 2x}} &= 6 \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 2x) - \frac{16}{\sqrt{2x^2 - 2x}} &= 12 \quad (3) \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 2x} > 0$ ($2x^2 - 2x > 0$ (**)). Thay t vào (3), ta được:

$$\begin{aligned} t^2 + \frac{16}{t} &= 12 \\ \Rightarrow t^3 + 16 &= 12t \\ \Leftrightarrow t^3 - 12t + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)^2(t+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow t-2 &= 0 \text{ (Do } t > 0 \text{ nên } t+4 > 0) \\ \Leftrightarrow t &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 2x} &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -1 &\text{ (Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện (*) và (**))} \end{aligned}$$

Từ đó, hệ (I) có hai nghiệm là

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có duy nhất hai nghiệm (x, y) là $(-1, 1)$ và $(2, 4)$

4 Câu 4

Cho hàm số $f(x) = 5x^2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(5x^2 + m) = x - m$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 . Khi đó, chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > \frac{3}{25}.$$

Lời giải:

Đặt $t = 5x^2 + m$. Suy ra $5t^2 = f(t) = f(5x^2 + m) = x - m$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} t = 5x^2 + m \\ x = 5t^2 + m \end{cases} \Rightarrow 5t^2 + t = 5x^2 + x \Rightarrow (t - x)(5(t + x) - 1) = 0$$

Suy ra $t - x = 0$ hoặc $t + x = \frac{-1}{5}$ hay

$$5x^2 - x + m = 0 \quad (1') \text{ hoặc } 5x^2 + x + m + \frac{1}{5} = 0 \quad (2')$$

Giả sử hai phương trình (1') và (2') có chung với nhau nghiệm x_0 . Thay x_0 vào (1') và (2'), ta được:

$$\begin{cases} 5x_0^2 - x_0 + m = 0 \\ 5x_0^2 + x_0 + m + \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_0 + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{10}$$

Thay x_0 vào lại (1'), ta được: $m = -\frac{3}{20}$.

Phương trình $f(5x^2 + m) = x - m$ có bốn nghiệm phân biệt, vậy cả hai phương trình (1'), (2') đều có hai nghiệm phân biệt và không có nghiệm trùng nhau.

Suy ra $\Delta_1 = 1 - 20m > 0$ và $\Delta_2 = 1 - 20(m + \frac{1}{5}) > 0$ $m \neq -\frac{3}{20}$. Điều đó tương đương $m < \frac{1}{20}$ và $m < \frac{-3}{20}$. Vậy, $m < \frac{-3}{20}$.

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1'), x_3, x_4 là hai nghiệm của (2').

Theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= \frac{1}{5} \\ x_1 x_2 &= \frac{m}{5} \\ x_3 + x_4 &= \frac{-1}{5} \\ x_3 x_4 &= \frac{m}{5} + \frac{1}{25} \end{cases}$$

Suy ra

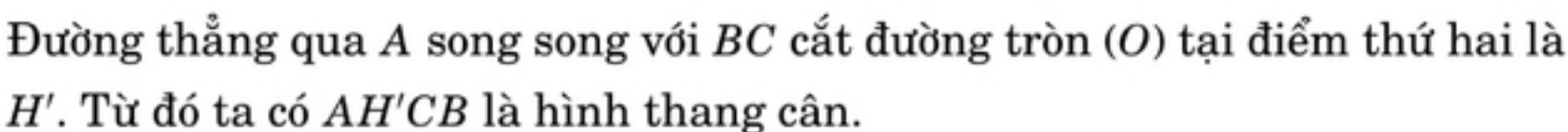
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + (x_3 + x_4)^2 - x_3 x_4 \\ &= \frac{1}{25} - \frac{2m}{5} + \frac{1}{25} - \frac{2m}{5} - \frac{2}{25} \\ &= \frac{-4m}{5} \\ &> \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

5 Câu 5

Cho tam giác ABC ($\widehat{B} > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AB lấy điểm F (F khác A và B), tia AF cắt đường thẳng BC tại D . Trên cung lớn AC lấy điểm G (G khác A và C) sao cho tia AG cắt tia BC tại E . Tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEG tại điểm H . Chứng minh rằng tứ giác $AHCB$ là hình thang cân.

Lời giải:


$$\widehat{BDF} = 180^\circ - \widehat{FAH'} = \widehat{FBH'}$$

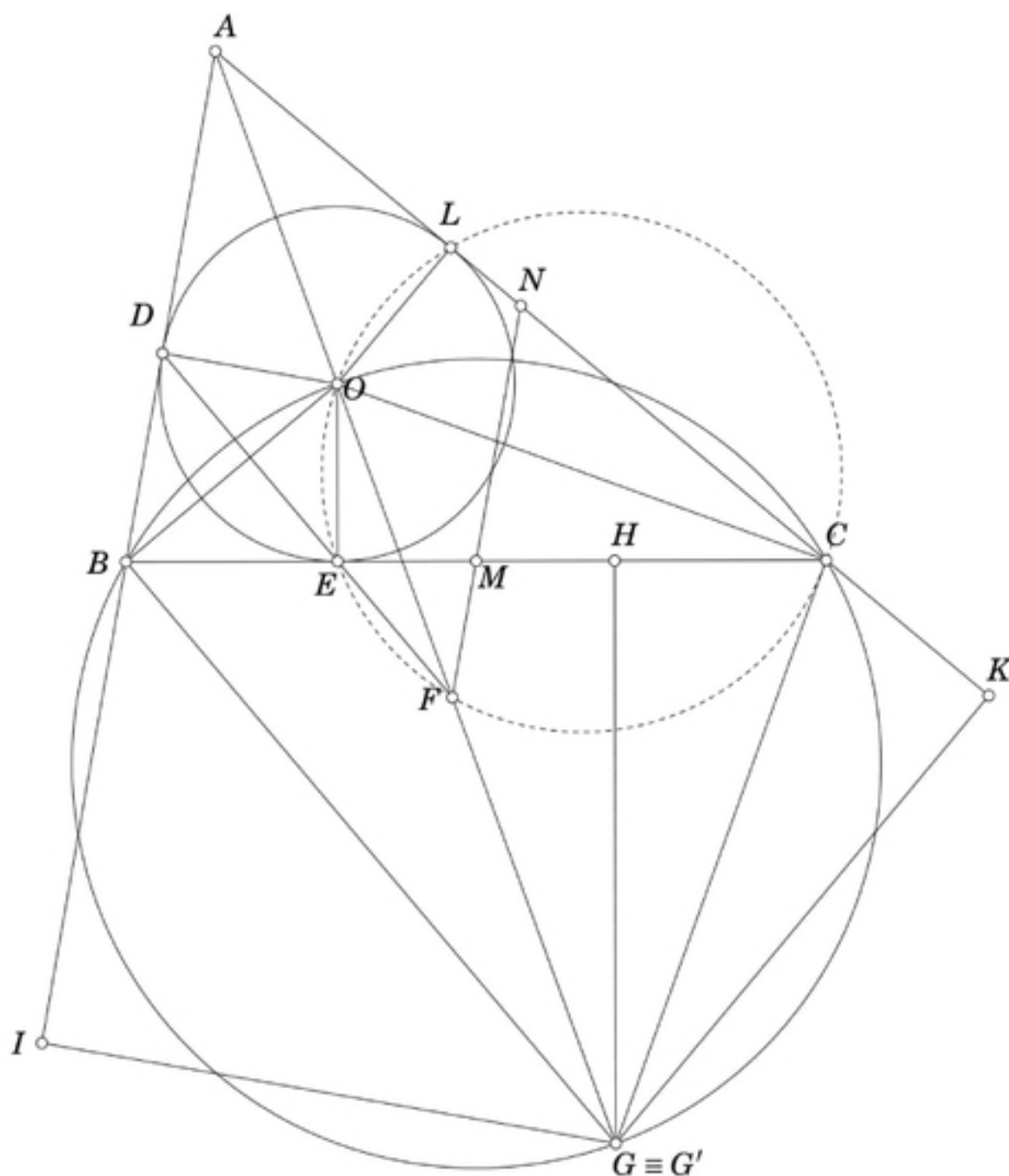
Tương tự ta cũng có CH' tiếp xúc (CGE) tại C . (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $H \equiv H'$. Suy ra $AHCB$ là hình thang cân.

Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC ($AB < AC$). Các tiếp điểm trên BA, BC theo thứ tự là D, E . Gọi M là trung điểm của đoạn BC, F là giao điểm của DE và tia AO .

1. Chứng minh rằng $MF \parallel AB$.
2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt tia AO tại G . Gọi H là hình chiếu của G trên BC . Chứng minh rằng $HC = BE$.

Lời giải:



1. Gọi N là trung điểm AC . Khi đó MN là đường trung bình tam giác ABC , nên $MN \parallel AB$. MN cắt AO tại F' . Ta có: $\widehat{AF'N} = \widehat{BAO} = \widehat{CAO}$. Suy ra tam giác NAF' cân tại N . Suy ra $NF' = NA = NC$. Suy ra $\widehat{CF'A} = 90^\circ$ hay $CF' \perp AO$ tại F' . (1)

Mặt khác, ta có:

$$\widehat{EFO} = \widehat{BDE} - \widehat{BAO} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{OCB}$$

Từ đó suy ra tứ giác $FEOC$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{OFC} = \widehat{OEC} = 90^\circ$ hay $CF \perp AO$ tại F . (2)

Từ (1) và (2) suy ra $F \equiv F'$. Suy ra $MF \parallel AB$.

2. Gọi L là tiếp điểm của (O) với cạnh AC . Gọi G' là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Gọi I, K lần lượt là tiếp điểm của (G') với AB, AC . Ta có:

$$\widehat{OBG'} = \frac{\widehat{ABC}}{2} + \frac{\widehat{IBC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Tương tự ta cũng có $\widehat{OBG'} = \widehat{OCG'} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $OBG'C$ nội tiếp hay $G' \in (OBC)$.

Suy ra $G \equiv G'$. Suy ra G là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Suy ra H là tiếp điểm của G với BC .

Ta có $BH = BI, CH = CK$. Suy ra

$$AI + AK = AB + BI + AC + CK = AB + BH + AC + CH = AB + BC + CA$$

Suy ra

$$AB + BH = AI = AK = AC + AH = \frac{AB + BC + CA}{2}$$

Hay

$$CH = \frac{AB + BC + CA}{2} - AC \quad (1')$$

Mặt khác, ta có $BD = BE, AD = AL, CL = CE$. Suy ra

$$2BE + 2AC = BE + BD + CE + DA + AL + LC = AB + AC + BC$$

Hay

$$BE = \frac{AB + BC + CA}{2} - AC \quad (2')$$

Từ (1') và (2') suy ra $BE = HC$.

7 Câu 7

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 20y \quad (1)$$

Lời giải:

Do nhận thấy rằng nếu (x, y) là nghiệm của (1) thì $(-x, y)$ cũng là nghiệm của (1) nên không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq 0$. Từ giả thiết, ta có:

$$(x - y)^2(x + y)^2 = 1 + 20y$$

Từ đó ta có: $1 + 20y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{20}$.

Mà y là số nguyên nên $y \in \mathbb{N}$. Suy ra $(x - y)^2(x + y)^2 \geq 1$.

- Giả sử $(x - y)^2 = 1$. Suy ra

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 1 + 20y \\ \Leftrightarrow 1 + 20y &= y^2 + 2xy + x^2 \geq y^2 \\ \Rightarrow 0 &\leq y \leq 10\end{aligned}$$

Nếu y là số lẻ thì $(x + y)^2 = 1 + 20y$ chia 8 dư 5 điều này vô lý do không có số chính phương nào chia 8 dư 5. Vì vậy, y là số chẵn.

Xét các trường hợp $y \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, ta thấy các bộ $(x, y) \in \{(1, 0), (5, 4), (5, 6)\}$ thỏa mãn $(x + y)^2 = 1 + 20y$ và $(x - y)^2 = 1$.

- Giả sử $(x - y)^2 > 1$. Do $(x - y)^2$ là số chính phương nên $(x - y)^2 \geq 4$. Suy ra

$$1 + 20y \geq 4(x + y)^2 \geq 4y^2 \Rightarrow 0 \leq y \leq 5$$

Với $y \in \{0, 2, 4\}$ thì $1 + 20y$ mới là số chính phương. Cả hai trường hợp này đều không thỏa.

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $(x, y) \in \{(1, 0), (-1, 0), (5, 4), (-5, 4), (5, 6), (-5, 6)\}$