

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Bài I (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.
- 2) Cho ba số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

Bài II (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.
- 2) Chứng minh với mỗi số nguyên n , số $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.

Bài III (2,0 điểm)

- 1) Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu tỉ.
- 2) Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a + b + c = 5$. Chứng minh $2a + 2ab + abc \leq 18$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N . Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

- 1) Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.
- 2) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O) . Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ . Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
- 3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF . Chứng minh AB vuông góc với AK .

Bài V (1,0 điểm)

Cho A là một tập hợp con có 100 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$

- 1) Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.
- 2) Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2, 3, 4, \dots, 22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n .

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0$.

2) Cho ba số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh

$$\frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = 0$$

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Cách 1:

Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$.

Ta có:

$$(t^2 - 1)^2 + t^2 - 1 + 2 - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t^2 - 1) - 2(t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t-1)(t+1) - 2(t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2(t+1) - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3 - t^2 + 2t^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2(t-1) + 2(t-1)(t+1)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2 + 2t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(TM) \\ (t+1)^2 + 1 = 0(L) \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$, suy ra $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (TM).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Cách 2:

Ta có: $x^2 + x + 2 - 2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x+1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0(TM)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

2) Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a-b}{1+c^2} + \frac{b-c}{1+a^2} + \frac{c-a}{1+b^2} = \frac{a-b}{ab+bc+ca+c^2} + \frac{b-c}{ab+bc+ca+a^2} + \frac{c-a}{ab+bc+ca+b^2} \\ &= \frac{a-b}{(a+c)(b+c)} + \frac{b-c}{(a+b)(c+a)} + \frac{c-a}{(a+b)(b+c)} = \frac{(a-b)(a+b) + (b-c)(b+c) + (c-a)(c+a)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \end{aligned}$$

(đpcm).

Bài II (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0$.

2) Chứng minh với mỗi số nguyên n , số $n^2 + n + 16$ không chia hết cho 49.

Lời giải

1)

$$x^2 + 5xy + 6y^2 + x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2y)(x+3y) + (x+2y) = 2 \Leftrightarrow (x+2y)(x+3y+1) = 2$$

(1)

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ suy ra $x+2y; x+3y+1 \in \mathbb{Z}$

Vậy từ (1) ta suy ra các trường hợp sau

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+2y=2 \\ x+3y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x+2y=-2 \\ x+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x+2y=-1 \\ x+3y+1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là $(6; -2); (1; 0); (-2; 0); (3; -2)$.

2) Ta có $P = n^2 + n + 16$ suy ra $4P = 4n^2 + 4n + 64 = (2n+1)^2 + 63$.

TH1: $2n+1 \not\equiv 7$ suy ra $(2n+1)^2 \not\equiv 49$ mà $63 \not\equiv 49$ suy ra $4P \not\equiv 49$ suy ra $P \not\equiv 49$.

TH2: $2n+1 \equiv 7$ suy ra $(2n+1)^2 \equiv 49$ mà $63 \equiv 7$ suy ra $4P \equiv 49$ suy ra $P \equiv 49$.

Vậy $P \not\equiv 49$ với mọi n (đpcm)

Bài III (2,0 điểm)

1) Cho số thực x khác 0 thỏa mãn $x + \frac{2}{x}$ và x^3 đều là số hữu tỉ. Chứng minh x là số hữu

tỉ.

2) Cho các số thực không âm a, b và c thỏa mãn $a+b+c=5$. Chứng minh

$$2a+2ab+abc < 18$$

Lời giải

1)

Cách 1:

Ta có $x + \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$ suy ra $x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q}$.

Cùng có $x^3 \in \mathbb{Q}$ suy ra $\frac{8}{x^3} \in \mathbb{Q}$ suy ra $x^3 - \frac{8}{x^3} = \left(x - \frac{2}{x}\right)\left(x^2 + 2 + \frac{4}{x^2}\right) \in \mathbb{Q}$

Do $x^2 + \frac{4}{x^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 2 \in \mathbb{Q}$ nên suy ra $x - \frac{2}{x} \in \mathbb{Q}$.

Vậy $2x = \left(x + \frac{2}{x}\right) + \left(x - \frac{2}{x}\right) \in \mathbb{Q}$ suy ra $x \in \mathbb{Q}$ (điều phải chứng minh)

Cách 2:

Ta có: $x + \frac{2}{x}$ là số hữu tỉ

$$\Rightarrow \frac{x^4 + 2x^2}{x^3} \in \mathbb{Q}$$

Mà: $x^3 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^4 + 2x^2 \in \mathbb{Q}$ (1)

$$\Rightarrow (x^2 + 1)^2 \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

Ta lại có: $\frac{x^2 + 2}{x} \in \mathbb{Q}; x^2(x^2 + 2) \in \mathbb{Q} \Rightarrow x(x^2 + 2)^2 \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x} x(x^2 + 2)^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x^2 + 2)^3 \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow (x^2 + 2)^3 - 3(x^2 + 1)^2 \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)^3 + 3(x^2 + 1) + 1 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)^3 + 3(x^2 + 1) \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)\left[(x^2 + 1)^2 + 3\right] \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 + 2 \in \mathbb{Q}$$

Mà: $\frac{x^2 + 2}{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (x^2 + 2) \cdot \frac{x}{x^2 + 2} = x \in \mathbb{Q}$

$$2) \quad 2a + 2ab + abc = 2a + ab(c + 2) \leq 2a + a\left(\frac{b + c + 2}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2a + 2ab + abc \leq 2a + a \left(\frac{7-a}{2} \right)^2$$

Ta sẽ chứng minh:

$$2a + a \cdot \frac{a^2 - 14a + 49}{4} \leq 18$$

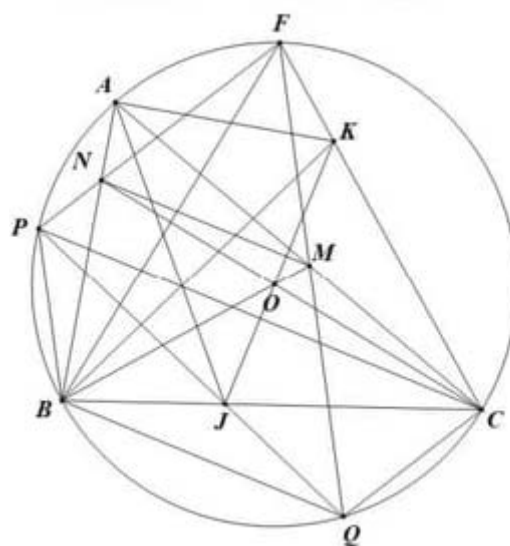
$$\Leftrightarrow a^3 - 14a^2 + 57a - 72 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-3)^2(a-8) \leq 0 \text{ luôn đúng với mọi } 0 < a < 5$$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) , với góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và $AB < AC$. Các đường thẳng BO, CO lần lượt cắt các đoạn thẳng AC, AB tại M, N . Gọi F là điểm chính giữa của cung BC lớn.

Lời giải



1) Chứng minh năm điểm A, N, O, M và F cùng thuộc một đường tròn.

$$\widehat{BOC} = \widehat{BAC} \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMON nội tiếp (1)

$$\widehat{NAO} = \widehat{NMO} \text{ (cùng chắn } \widehat{ON} \text{)}$$

$$\widehat{MAO} = \widehat{MNO} \text{ (cùng chắn } \widehat{OM} \text{)}$$

$$\text{Mà } \widehat{NAO} = \widehat{NBO} \text{ (do } OA = OB \Rightarrow \Delta OAB \text{ cân)}$$

$$\widehat{MAO} = \widehat{MCO} \text{ (do } OA = OC \Rightarrow \Delta OAC \text{ cân)}$$

$$\text{Nên } \widehat{NBM} = \widehat{NMB} \Rightarrow \Delta MBN \text{ cân tại } N \Rightarrow NM = NB$$

$$\widehat{MNC} = \widehat{MCN} \Rightarrow \Delta MCN \text{ cân tại } M \Rightarrow MN = MC$$

$$\Rightarrow NB = MC$$

Xét $\triangle FNB$ và $\triangle FMC$ có:

$$NB = MC \text{ (chứng minh trên)} \quad \widehat{NBF} = \widehat{MCF} \text{ (cùng chắn } \widehat{AF})$$

$$FB = FC \text{ (} F \text{ là điểm chính giữa } \widehat{BC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle FNB = \triangle FMC (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FN = FM \\ \widehat{NFB} = \widehat{MFC} \end{cases}$$

$$\text{Mà } \widehat{MFC} + \widehat{MFB} = \widehat{BFC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NFB} + \widehat{MFB} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{NFM} = 60^\circ \\ \widehat{NAM} = 60^\circ \end{cases}$$

Tứ giác $NAFM$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, N, O, M, F cùng thuộc một đường tròn

2) Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của hai tia FN, FM với đường tròn (O) . Gọi J là giao điểm của đường thẳng BC và đường thẳng PQ . Chứng minh tia AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Ta có $\widehat{CQ} = \widehat{AF} = \widehat{BP}$, do đó $QJMC$ và $BJNP$ là các tứ giác nội tiếp

F là điểm chính giữa cung BC nên $\widehat{BFC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ suy ra $\triangle BFC$ đều

$$\text{Suy ra } \widehat{MQC} = \widehat{MQC} = \widehat{FAC} = 60^\circ$$

Lại có $\widehat{MOC} = 60^\circ$ suy ra $MCQO$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra 5 điểm M, C, Q, J, O cùng thuộc một đường tròn

Chứng minh tương tự B, N, O, J, P cũng thuộc một đường tròn

$$\text{Suy ra } \widehat{CJM} = \widehat{COM} = 60^\circ = \widehat{BAC}$$

$$\text{Suy ra } AMJB \text{ là tứ giác nội tiếp} \Rightarrow \widehat{MAJ} = \widehat{MBJ} = 30^\circ = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

Suy ra AJ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng OJ và đường thẳng CF . Chứng minh AB vuông góc với AK .

Theo trên ta có $PBQC$ là hình thang cân, OJ là đường trung trực của CP

$$\text{Mặt khác } \widehat{JAP} = \widehat{CAP} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CAP} - 30^\circ = \widehat{JOP} - \widehat{OCF} = \widehat{JOP} - \widehat{OPK} = \widehat{JKP}$$

Suy ra tứ giác $AKJP$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{KAJ} = \widehat{JPK} = \widehat{KCJ} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BAJ} + \widehat{KAJ} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

Hay $AK \perp AB$

Bài V (1,0 điểm)

Cho A là một tập hợp con có 100 phần tử của tập hợp $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$

1) Chứng minh A chứa hai số tự nhiên liên tiếp.

2) Chứng minh với mọi số tự nhiên n thuộc tập hợp $\{2, 3, 4, \dots, 22\}$, tồn tại hai phần tử của A có hiệu bằng n .

Lời giải

1) Gọi các phần tử của tập A là $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}\}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{100}$

Giả sử tập A không có hai số tự nhiên nào liên tiếp thì ta có

$$a_2 - a_1 \geq 2; a_3 - a_2 \geq 2; \dots; a_{100} - a_{99} \geq 2$$

Suy ra $a_{100} = a_{100} - a_{99} + \dots + a_3 - a_2 + a_2 - a_1 + a_1 \geq 99 \cdot 2 + a_1 > 178$ vậy a_{100} không thuộc tập

$\{1, 2, 3, \dots, 178\}$ (trái với giả thiết) suy ra điều giả sử là sai từ đó ta có điều phải chứng minh.

2) Với $n \in \{2, 3, 4, \dots, 22\}$ giả sử không tồn tại hai phần tử nào của A có hiệu bằng n (*).

Ta có $a_i \neq a_j + kn \quad (k \in \mathbb{N}) \forall i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$

Với các phần tử a_1, a_2, a_3, a_{12}

Ta có $a_1 \leq 79$ khi đó tập A không thể có các phần tử có dạng $a_1 + k.n \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Xét bất phương trình } a_1 + k.n \leq 178 \Rightarrow k \geq \frac{178 - a_1}{n} \geq \frac{99}{22} > 4$$

Vậy ít nhất có 4 số thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$ không thuộc A .

Tương tự như vậy với $a_2, a_3, \dots, a_{12}$ mỗi trường hợp cũng có ít nhất có 4 số thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$ không thuộc A (các số bỏ đi trong các trường hợp là khác nhau).

Với các phần tử $a_{13}, a_{14}, a_{15}, \dots, a_{34}$

Ta có $a_{13} \leq 91$ khi đó tập A không thể có các phần tử có dạng $a_{13} + k.n \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Xét bất phương trình } a_{13} + kn \leq 178 \Rightarrow k \geq \frac{178 - a_{13}}{n} \geq \frac{87}{22} > 3$$

Vậy ít nhất có 3 số thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$ không thuộc A .

Tương tự như vậy với $a_{14}, a_{15}, \dots, a_{34}$ mỗi trường hợp cũng có ít nhất có 3 số thuộc tập $\{1, 2, 3, \dots, 178\}$ không thuộc A (các số bỏ đi trong các trường hợp là khác nhau).

Suy ra tập A không nhiều hơn $178 - 114 = 64$ phần tử (trái với giả thiết) vậy điều giả sử (*) là sai từ đó ta có điều phải chứng minh.

-----HẾT-----