

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 19/9/2023

Bài 1. (5.0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 < 2; u_2 < 2$ và $u_{n+2} = \frac{1}{7}(u_{n+1} + 3^{u_n} + 3), \forall n \geq 1$.

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2. (5.0 điểm)

Cho A là một tập con của tập số thực $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

i) $A \cap (0,1) \neq \emptyset$

ii) Nếu $x \in A$ và $y \in A$ thì $y - x$ và xy là những phân tử thuộc A .

Chứng minh rằng với mọi số thực m và mọi phân tử $x \in A$ thì luôn tồn tại $y \in A$ để

$$|x - y| < \frac{1}{2024^m}.$$

Bài 3. (5.0 điểm)

Gọi I, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trực tâm của tam giác nhọn ABC ; các điểm B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC; AB$. Biết rằng tia B_1I cắt cạnh AB tại B_2 khác B và tia C_1I cắt tia đối của tia CA tại C_2 khác C . Đường thẳng B_2C_2 cắt BC tại K . Gọi A_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . Chứng minh rằng ba điểm A, I, A_1 thẳng hàng khi và chỉ khi tam giác BKB_2 và tam giác CKC_2 có diện tích bằng nhau.

Bài 4. (5.0 điểm). Cho 45 điểm phân biệt nằm trong hình tròn bán kính $\sqrt{3}$. Tô màu đỏ tất cả các đoạn thẳng nối 2 điểm trong 45 điểm đó có khoảng cách không vượt quá $\sqrt{3}$.

- a) Giả sử tất cả các đoạn thẳng tạo thành đều được tô màu đỏ. Chứng minh rằng có thể phủ tất cả các đoạn thẳng đó bởi 1 hình tròn có bán kính bằng 1.
b) Hỏi có ít nhất bao nhiêu đoạn thẳng màu đỏ? Vì sao?

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....