

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn thi: TOÁN (Ngày thứ tư)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{(1-ab)(1-bc)} + \sqrt{(1-bc)(1-ca)} + \sqrt{(1-ca)(1-ab)} \geq 2.$$

Bài 6. Cho số nguyên dương $k \geq 3$. Kí hiệu $f(k)$ là số các số nguyên dương m sao cho tồn tại bộ số nguyên dương nguyên tố cùng nhau $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn $m \mid a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng $k < f(k) < 2^k$.

Bài 7. Cho n là số nguyên dương, $n \geq 4$. Trong mặt phẳng xét n điểm phân biệt, sao cho 2 điểm bất kì trong chúng hoặc không được nối với nhau hoặc được nối với nhau chỉ bằng 1 cạnh và bất kì điểm nào trong chúng được nối với ít nhất 1 điểm khác trong n điểm đó. Biết rằng có ít nhất $\left\lceil \frac{n(n+2)}{4} \right\rceil$ cạnh giữa n điểm đó. Chứng minh rằng tồn tại $k+1$ điểm ($k \geq 3$) trong n điểm đó, kí hiệu là $A_1, \dots, A_{k+1}$ sao cho A_{k+1} được nối với $A_1, \dots, A_k$ và A_1 nối với A_2 , A_2 với $A_3, \dots$, A_i nối với A_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$), ..., A_{k-1} nối với A_k và A_k nối với A_1 .

(Chú ý: với $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất mà nó lớn hơn hoặc bằng x .)

———— HẾT ————