

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) : \left(\frac{2}{x} + \frac{x-2}{x\sqrt{x}+x} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P, từ đó tìm giá trị của x sao cho $P = 4$

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$

Bài 2. a) Cho đường thẳng (d): $y = -2x + 4$. Gọi A và B lần lượt là giao điểm của (d) với các trục tọa độ Ox, Oy và $C(m; -2m + 4)$ là điểm thuộc đoạn thẳng AB. Tìm các giá trị tham số m để diện tích tam giác OBC bằng hai lần diện tích tam giác OAC.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x + 3y \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

c) Cho tam giác ABC là tam giác đều. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC biết $R - r = 2$

Bài 3. a) Tìm các cặp số nguyên dương (x; y) thỏa mãn $x^2 - 3xy + 2y^2 + x - 2y - 5 = 0$

b) Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng (Phú Thọ) với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được 10 quả. Xác định giá bán mỗi quả bưởi để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30000 đồng.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác BFEC nội tiếp và $KF \cdot KE = KB \cdot KC$

b) Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I (I khác A). Chứng minh rằng ba điểm M, H, I thẳng hàng.

Bài 5. a) Giải phương trình $x^3 + x = (x+3)\sqrt{x+2}$

b) Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a + b = 4ab$

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+a^2} \geq \frac{4}{5}$