

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2020-2021
Môn thi: Toán (chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút**

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức

$$B = (10x^2 - 30x + 11)^2 + \frac{(2x^2 - 6x + 3)^{10}}{x^5 - 3x^4 + x^3 - 1} \text{ khi } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

2) Chứng minh rằng : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq -2$ biết $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) + 4 = 0 \\ xy > 0 \end{cases}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình : $5x^2 + 3x + 6 = (7x + 1)\sqrt{x^2 + 3}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x + y} = 16 \\ \sqrt{x^2 + 12} + \frac{5}{2}\sqrt{x + y} = 3x + \sqrt{x^2 + 5} \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z + 2\sqrt{2}}$

2) Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a - 2; 4a^2 - 16a + 17; 6a^2 - 24a + 25$ đều là các số nguyên tố.

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho đường tròn $(O; R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Lấy E là điểm bất kỳ nằm trên cung nhỏ AD (E không trùng với A và D). Đường thẳng EC cắt OA tại M ; đường thẳng EB cắt OD tại N

a) Chứng minh rằng : $AM \cdot ED = \sqrt{2} OM \cdot EA$

b) Xác định vị trí điểm E để tổng $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN}$ đạt giá trị nhỏ nhất

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính MN . Trên tia đối của tia MO lấy điểm B . Trên tia đối của tia NO lấy điểm C . Từ B và C kẻ các tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) , chúng cắt nhau tại A , tiếp điểm của nửa đường tròn (O) với BA, BC lần lượt tại E, D . Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Chứng minh AH, BD, CE đồng quy.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số thực x, y, z dương thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Chứng minh:

$$\frac{x^2 y}{x + 1} + \frac{y^2 z}{y + 1} + \frac{z^2 x}{z + 1} \geq 2xyz$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1) *Tính giá trị biểu thức*

$$\text{Ta có: } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (2x - 3)^2 = 5 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

Ta có:

$$10x^2 - 30x + 11 = 10(x^2 - 3x + 1) + 1 = 10 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$2x^2 - 6x + 3 = 2x^2 - 6x + 2 + 1 = 2(x^2 - 3x + 1) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x^5 - 3x^4 + x^3 - 1 = x^3(x^2 - 3x + 1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

Vậy $B = 0$

2) *Chứng minh rằng* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq -2$

$$\text{Ta có: } x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 2(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + 2xy + y^2) + 4(x + y) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + y^2)(x + y + 2) + (x + y + 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 2)[(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 2] = 0$$

$$(\text{vì } [(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + 2] > 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = -2 \text{ mà } xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có: } \sqrt{(-x)(-y)} \leq \frac{(-x) + (-y)}{2} = \frac{-(x + y)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Do đó } xy \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{xy} \Leftrightarrow \frac{-2}{xy} \leq -2$$

$$\text{Mà } M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{-2}{xy}$$

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq -2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = -1$$

Câu 2.

1) Giải phương trình :

$$5x^2 + 3x + 6 = (7x + 1)\sqrt{x^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 3x + 6 - (7x + 1)\sqrt{x^2 + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 3) - (x + 1)\sqrt{x^2 + 3} + 3x^2 + 3x - 6x\sqrt{x^2 + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3}(2\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) - 3x(2\sqrt{x^2 + 3} - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x^2 + 3} - x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} - 3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + 3} = x + 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} = 3x \end{cases}$$

$$*)TH1: 2\sqrt{x^2 + 3} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2 + 12 = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 - 2x + 11 = 0 \end{cases} (VN)$$

*)TH2:

$$\sqrt{x^2 + 3} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3 = 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 12} + \frac{5}{2}\sqrt{x+y} = 3x + \sqrt{x^2 + 5} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x + y > 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x + y) \cdot [(x + y)^2 - 2xy] + 8xy = 16(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x + y)[(x + y)^2 - 16] - 2xy(x + y - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 4)[x^2 + y^2 + 4(x + y)] = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$(Do x + y > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4(x + y) > 0)$$

Thay $x + y = 4$ vào phương trình (2) ta được :

$$\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5(*)$$

$$\text{Nhận xét } VT > 0 \Rightarrow VP > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3},$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}-4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=2(tm) \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}-4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0 \left(VN \text{ khi } x > \frac{5}{3} \right) \end{cases}$$

Vậy hệ có duy nhất 1 nghiệm $x=y=2$

Câu 3.

1) *Tìm nghiệm nguyên dương....*

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z+2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}+y=z+2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy}=z-x-y+2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4xy=(z-x-y)^2+8+4\sqrt{2}(z-x-y)$$

Nếu $z-x-y \neq 0$ thì vế phải là số vô tỉ, vế trái là số nguyên dương. Vô lí

$$\text{Nếu } z-x-y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-x-y=0 \\ 4xy=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x+y \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x, y \text{ là các số nguyên dương nên } \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=2; y=1 \end{cases} \Rightarrow z=3$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y; z) \in \{(1; 2; 3); (2; 1; 3)\}$

2) *Tìm các số tự nhiên a *

Đặt $a-2=p$ (p là số nguyên tố)

$$\Rightarrow 4a^2-16a+17=4(a^2-4a+4)+1=4p^2+1$$

$$\Rightarrow 6a^2-24a+25=6(a-2)^2+1=6p^2+1$$

Do p là số nguyên tố nên $4p^2+1 > 5$ và $6p^2+1 > 5$

Ta có: $4p^2+1=5p^2-(p-1)(p+1)$ và $6p^2+1=5p^2+5+(p+2)(p-2)$

+) Xét trường hợp $p:5$

Mà p là số nguyên tố nên $p=5 \Rightarrow a=7$

Thử lại với $a=7 \Rightarrow a-2=5, 4a^2-16a+17=101, 6a^2-24a+25=151$ là các số nguyên tố.

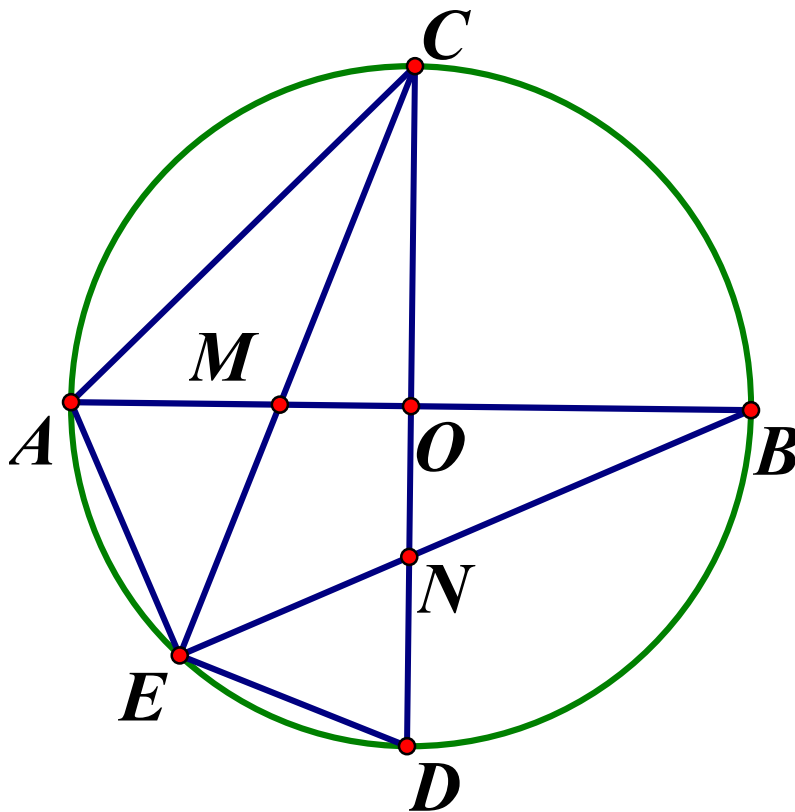
+) Xét trường hợp p không chia hết cho 5, ta có các trường hợp sau:

- Nếu p chia 5 dư 1 hoặc 4 thì $(p-1)(p+1):5 \Rightarrow 4p^2 + 1:5$
 $\Rightarrow 4p^2 + 1$ không là nguyên tố
- Nếu p chia cho 5 dư 2 hoặc dư 3 thì $(p-2)(p+2):5 \Rightarrow 6p^2 + 1:5$
 $\Rightarrow 6p^2 + 1$ không là số nguyên tố

Vậy $a = 7$ là giá trị cần tìm

Câu 4.

1)



a) Xét $\triangle COM$ và $\triangle CED$ có $\angle COM = \angle CED = 90^\circ$, $\angle C$ chung
 $\Rightarrow \triangle COM \sim \triangle CED (g.g) \Rightarrow \frac{CO}{CE} = \frac{OM}{ED} (1)$

Do AB, CD là 2 đường kính vuông góc với nhau $\Rightarrow \angle EOA = \angle COA = 45^\circ$

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EAC$ có: $\angle EOA = \angle COA = 45^\circ$, $\angle C$ chung $\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle EAC (g.g)$

$\Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{AM}{AE}$ mà $AC = \sqrt{2}CO$ (do $\triangle ACO$ vuông cân tại O)

$$\text{Kết hợp với (1)} \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{\sqrt{2}CO}{CE} = \frac{\sqrt{2}OM}{ED} \Leftrightarrow \frac{ED}{AE} = \frac{\sqrt{2}OM}{AM}$$

$$\Rightarrow AM \cdot ED = \sqrt{2}OM \cdot AE$$

b) Theo câu a ta có: $\frac{ED}{AE} = \frac{\sqrt{2}OM}{AM}$ (2), tương tự câu a ta có: $\frac{EA}{DE} = \frac{\sqrt{2}ON}{DN}$ (3)

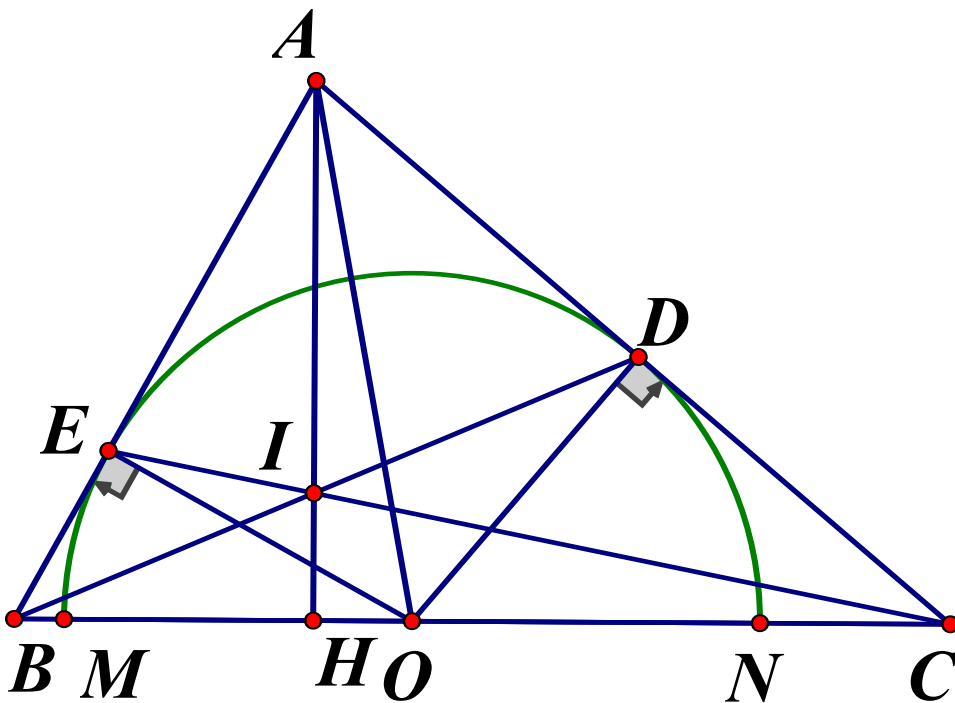
Nhân 2 vế của (2) và (3) ta có: $\frac{OM}{AM} \cdot \frac{ON}{DN} = \frac{1}{2}$

Ta có: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} \geq 2\sqrt{\frac{OM}{AM} \cdot \frac{ON}{DN}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{OM}{AM} = \frac{ON}{DN} \Leftrightarrow \frac{ED}{\sqrt{2}EA} = \frac{EA}{\sqrt{2}ED} \Leftrightarrow EA = ED \Leftrightarrow E$ là điểm chính giữa cung nhỏ AD

Vậy GTNN của $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{DN} = \sqrt{2} \Leftrightarrow E$ là điểm chính giữa của cung nhỏ AD

2) Chứng minh AH, BD, CE đồng quy



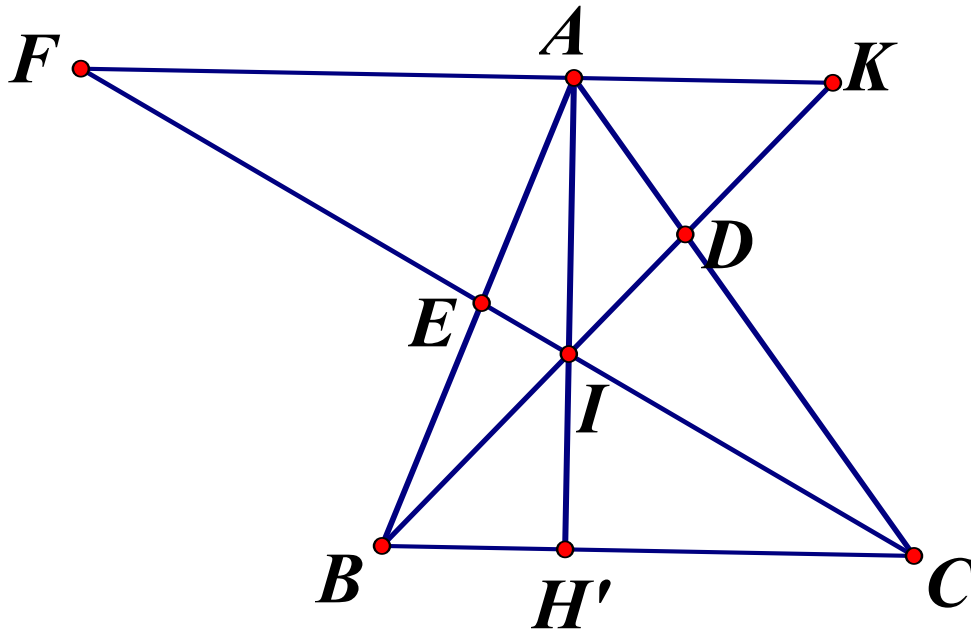
Ta có AE, AD là 2 tiếp tuyến nên $AD = AE$, AO là phân giác của $\angle BAC$

$\Rightarrow \triangle BEO \sim \triangle BHA \Rightarrow BH \cdot BO = BE \cdot BA$, tương tự: $CH \cdot CO = CD \cdot CA$

$$\Rightarrow \frac{BH \cdot BO}{CH \cdot CO} = \frac{BE \cdot BA}{CD \cdot CA}$$

AO là phân giác của $\angle BAC \Rightarrow \frac{BO}{CO} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BH \cdot AB}{CH \cdot AC} = \frac{BE \cdot BA}{CD \cdot CA}$

$$\Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow \frac{CH}{BH} \cdot \frac{BE}{CD} = 1$$



Gọi I là giao điểm của BD và CE , AI cắt BC tại H'

Qua A kẻ một đường thẳng song song với BC cắt tia BD, CE lần lượt tại K, F

Theo định lý Ta – let ta có:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{BC}, \frac{BE}{AE} = \frac{BC}{FA}, \frac{CH'}{H'B} = \frac{AF}{AK}. \text{ Nhân từng vế của các tỉ lệ thức ta được:}$$

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CH'}{H'B} \cdot \frac{BE}{EA} = \frac{AK}{BC} \cdot \frac{BC}{AF} \cdot \frac{AF}{AK} = 1 \Leftrightarrow \frac{BE}{DC} \cdot \frac{CH'}{H'B} = 1 \Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CH'}{H'B} \Rightarrow H \equiv H'$$

Vậy các đường thẳng AH, BD, CE đồng quy.

Câu 5.

$$\text{Xét } VT = \frac{x^2 y^2}{xy + y} + \frac{y^2 z^2}{yz + z} + \frac{z^2 x^2}{zx + x} \geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{xy + yz + zx + x + y + z} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$$

$$\text{Đặt } t = xy + yz + zx, \text{ từ giả thiết ta có: } (1-t)^2 = 4x^2 y^2 z^2 \leq \frac{4t^3}{27} \Leftrightarrow t \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Thay vào giả thiết được } 2xyz = 1 - (xy + yz + zx) \leq \frac{1}{4} \text{ hay } xyz \leq \frac{1}{8}$$

Do đó:

$$xy + yz + zx \geq 6xyz \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 6xyz(xy + yz + zx) \quad (2)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(xy + yz + zx)^2 &\geq 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) \\ \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) &\geq 6xyz(x + y + z) \quad (3)\end{aligned}$$

Cộng (2) và (3) ta có:

$$3(xy + yz + zx)^2 \geq 6xyz(xy + yz + zx + x + y + z) \quad (4)$$

Kết hợp (1) và (4) ta có điều phải chứng minh

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{2}$