

Câu 1: (3,0 điểm)

Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$.

Câu 2: (3,0 điểm)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$
 Tìm tất cả các giá trị của a, b để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thuộc $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 6$.

Câu 4: (5,0 điểm)

a) Cho điểm M tùy ý nằm bên trong tam giác ABC . Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MAC, MAB . Chứng minh rằng $S_1 \cdot \overrightarrow{MA} + S_2 \cdot \overrightarrow{MB} + S_3 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 + px + q$ với $(q \neq 0)$. Biết rằng (P) cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B và cắt trục Oy tại C . Chứng minh rằng khi p và q thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2; u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$, với $n = 1.2.3 \dots$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) giảm và bị chặn.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 6: (3,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện: $f\left(\frac{x+y}{2020}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2019}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$

HẾT