

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (6 điểm)

a) Giải phương trình: $2x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 = 3x^2 + x$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + y^2 - x^2y - xy - y = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-3x-4} \end{cases}$$

Câu 2 (3 điểm)

a) Tìm tất cả các số $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^4 = 4$

b) CMR: nếu m, n là 2 số tự nhiên thỏa mãn: $2m^2 + m = 3n^2 + n$ thì $2m + 2n + 1$ là số chính phương

Câu 3 (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$$

Câu 4 (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

a) CMR: BC là phân giác ngoài của tam giác DEF

b) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với (O) (M thuộc cung nhỏ AB). O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMF và CME . CMR: $O_1O_2 \perp AM$

c) Lấy K trên đoạn HC ($K \neq C, H$), gọi I là giao điểm của BK với (O) ($I \neq B$), G là giao điểm của đường thẳng CI với BE . CMR: $S_{\triangle GFB} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE}\right) S_{\triangle CEF}$

Câu 5 (2 điểm) Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng 149cm, chiều rộng bằng 40cm cho 2020 điểm phân biệt. CMR: tồn tại ít nhất 2 điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2cm.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU 2020**NĂM 2020 – 2021****Môn : TOÁN****Ngày thi 21/7/2020****Thời gian làm bài: 150 phút**

Câu 1 (6 điểm) a) Giải phương trình: $2x\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3 = 3x^2 + x$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x^2 + y^2 - x^2y - xy - y = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-3x-4} \end{cases}$$

Giải:

a. Nhận thấy $x = 0$ không phải nghiệm của pt. Chia 2 vế cho x ta được:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{3}{x} = 3x + 1 \Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5\right]\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1\right] = 0.$$

$$\Rightarrow 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Do } \left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 > 1). \text{ Vậy } S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x^3 + x^2 + y^2 - x^2y - xy - y = 0 & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-3x-4} & (2) \end{cases} \text{ . ĐKXĐ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2y - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow y^2 - (x^2 + x + 1)y + x^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (y - x^2)(y - x - 1) = 0$$

***Trường hợp 1:** $y = x + 1$, thay vào điều kiện suy ra: $2(x + 1) - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$.

Mâu thuẫn với điều kiện $x \geq 0$. Suy ra hệ phương trình vô nghiệm.

***Trường hợp 2:** $y = x^2$, thay vào pt (2) ta được: $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2x^2 - 3x - 4}$

$$\text{Do } 2 \text{ vế } \geq 0, \text{ bình phương 2 vế ta được: } x + 2\sqrt{(x^2 - 1)x} + x^2 - 1 = 2x^2 - 3x - 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x^2 - 1)x} = x^2 - 4x - 3. \text{ Vế trái } \geq 0 \text{ nên } x^2 - 4x - 3 \geq 0. \text{ Kết hợp } x \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 + \sqrt{7}.$$

$$\text{Bình phương 2 vế và thu gọn ta được: } 4(x^3 - x) = (x^2 - 4x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 28x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 10x - 9) = 0$$

$$\text{Giải, đối chiếu với ĐKXĐ và } x \geq 2 + \sqrt{7} \text{ ta thu được } x = 5 + \sqrt{34}; y = 59 + 10\sqrt{34}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x; y) = (5 + \sqrt{34}; 59 + 10\sqrt{34}); y = 59 + 10\sqrt{34}$$

Câu 2 (3 điểm) a) Tìm tất cả các số $x, y \in \mathbb{Z}^+$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p^x - y^4 = 4$

b) CMR: m, n là 2 số tự nhiên thỏa mãn: $2m^2 + m = 3n^2 + n$ thì $2m + 2n + 1$ là số chính phương

Giải:

$$a) p^x - y^4 = 4 \Leftrightarrow p^x = y^4 + 4 = (y^2 + 2)^2 - 4y^2 = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2).$$

$$*Xét y = 1 \Rightarrow p^x = 5 \Rightarrow p = 5; x = 1(t/m), \text{ ta tìm được bộ } (x, y, p) = (1; 1; 5)$$

$$*Xét y = 2 \Rightarrow p^x = 20 \Rightarrow L \text{ do } p \text{ nguyên tố,}$$

$$*Xét y = 3 \Rightarrow p^x = 85 \Rightarrow L \text{ do } p \text{ nguyên tố,}$$

$$*Xét y = 4 \Rightarrow p^x = 260 \Rightarrow L \text{ do } p \text{ nguyên tố,}$$

$$*Xét y = 5 \Rightarrow p^x = 629 \Rightarrow L \text{ do } p \text{ nguyên tố,}$$

$$*Xét y \geq 6 \text{ suy ra: } y^2 - 2y + 2 > 2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 2 = p^a & (1) \\ y^2 + 2y + 2 = p^b & (2) \end{cases}, \text{ với } a, b \in \mathbb{N}; 1 \leq a < b; a + b = x$$

$$\text{Do } y \geq 6 \Rightarrow y^2 - 6y + 2 > 0 \text{ và } p \geq 2. \text{ Suy ra:}$$

$$p^a < p^b = y^2 + 2y + 2 < (y^2 + 2y + 2) + (y^2 - 6y + 2) = 2(y^2 - 2y + 2) < 2p^a \leq p^{a+1}$$

$$\text{Hay: } p^a < p^b < p^{a+1} \Leftrightarrow a < b < a + 1. \text{ Vô lý, loại}$$

$$\text{Vậy giá trị cần tìm là: } (x, y, p) = (1; 1; 5)$$

$$b) \text{ Ta có: } 2m^2 + m = 3n^2 + n \Leftrightarrow 2(m^2 - n^2) + (m - n) = n^2 \Leftrightarrow (2m + 2n + 1)(m - n) = n^2$$

$$* \text{ Xét } n = 0 \Rightarrow m = 0. \text{ Khi đó } 2m + 2n + 1 = 1 = 1^2 \text{ (đpcm)}$$

$$*Xét n > 0. \text{ Gọi } (2m + 2n + 1, m - n) = d; d \in \mathbb{N}^*. \text{ Khi đó: } n^2 = (2m + 2n + 1)(m - n) : d^2 \Rightarrow n : d$$

$$\Rightarrow m = (m - n) + n : d \Rightarrow 2m + 2n : d \Rightarrow 1 = (2m + 2n + 1) - (2m + 2n) : d \Rightarrow d = 1$$

$$\text{Vậy } (2m + 2n + 1, m - n) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2m + 2n + 1 = a^2 \\ m - n = b^2 \end{cases}; (a, b) = 1; a, b \in \mathbb{N}^*; ab = n$$

$$\text{Khi đó } 2m + 2n + 1 = a^2 \text{ là số chính phương (đpcm)}$$

Câu 3 (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}}$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4(c + ab)(a + bc) \leq (c + a + ab + bc)^2 = [(a + c)(b + 1)]^2$$

$$4(b + ac)(c + ab) \leq (b + c + ac + ab)^2 = [(b + c)(a + 1)]^2$$

$$4(a + bc)(b + ac) \leq (a + b + ac + bc)^2 = [(a + b)(c + 1)]^2$$

Nhân vế với vế ta được

$$\begin{aligned} [8(c+ab)(a+bc)(b+ca)]^2 &\leq [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 [(a+1)(b+1)(c+1)]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)} &\geq \frac{8}{(a+1)(b+1)(c+1)} \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có:

$$6 = a+1+b+1+c+1 \geq 3\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)} \Rightarrow 8 \geq (a+1)(b+1)(c+1) \quad (2)$$

$$P = \sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}} \geq 3 \quad (\text{do (1) và (2)})$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $P_{\min} = 3$ khi $a=b=c=1$

Câu 4 (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H .

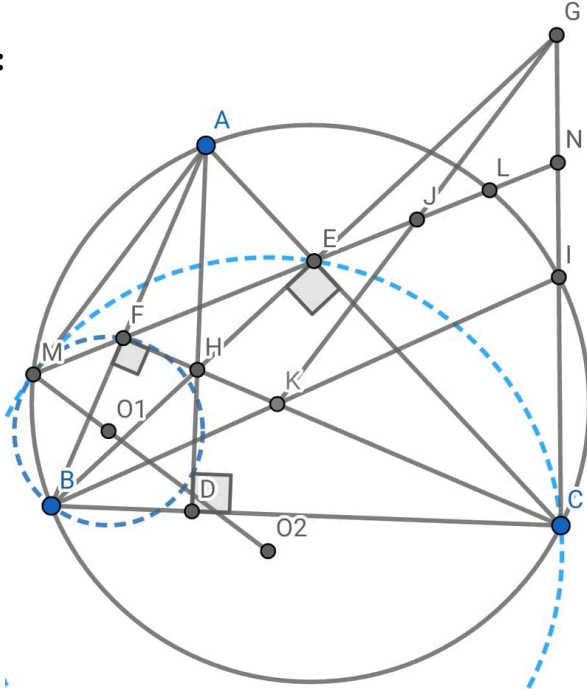
d) CMR: BC là phân giác ngoài của tam giác DEF

e) Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF với (O) (M thuộc cung nhỏ AB). O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BMF và CME . CMR: $O_1O_2 \perp AM$

f) Lấy K trên đoạn HC ($K \neq C, H$), gọi I là giao điểm của BK với (O) ($I \neq B$), G là giao

điểm của đường thẳng CI với BE . CMR: $S_{\triangle GFB} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE} \right) S_{\triangle ACF}$

Giải:



a. Do tứ giác BFHD nội tiếp suy ra: $\widehat{HBF} = \widehat{HDF}$ (t/c góc nội tiếp)

Do tứ giác ABDE nội tiếp suy ra: $\widehat{ABE} = \widehat{ADE}$

Từ đây suy ra: $\widehat{HDF} = \widehat{ADE}$. Hay DA là phân giác góc $\widehat{EDF}$

Mà $BC \perp DA$, nên BC là phân giác ngoài $\widehat{EDF}$ (đpcm)

b. Gọi $L = (O) \cap ME$. Có: $\widehat{AEM} = \frac{1}{2}(sd \widehat{AM} + sd \widehat{EL})$

(t/c góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Và $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}sd \widehat{ALC} = \frac{1}{2}(sd \widehat{AL} + sd \widehat{EL})$ (t/c góc nội tiếp)

Mà tứ giác BFEC nội tiếp suy ra: $\widehat{AEM} = \widehat{ABC}$

Từ đây suy ra: $\widehat{AM} = \widehat{AL}$. Khi đó: $\widehat{AML} = \widehat{ABM} = \widehat{ACM}$

Xét đường tròn (O_1) có: $\widehat{AMF} = \widehat{MBF}$. Suy ra:

MA là tiếp tuyến của $(O_1) \Rightarrow O_1M \perp AM$

Tương tự xét đường tròn (O_2) có: $\widehat{AME} = \widehat{MCE}$. Suy ra: MA là tiếp tuyến của (O_2)

$\Rightarrow O_2M \perp AM$

Kết hợp lại suy ra $O_1O_2 \perp AM$ (đpcm)

c. Gọi $J = KG \cap FE$; $N = KC \cap FE$;

Điều phải chứng minh tương đương với:

$$S_{\triangle GFB} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{BF \cdot BE \cdot \sin \widehat{EBF}}{CF \cdot CE \cdot \sin \widehat{ECF}} \right) S_{\triangle CEF} = \left(\frac{FK}{FC} + \frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle CEF}} \right) S_{\triangle CEF} \text{ do } \widehat{EBF} = \widehat{ECF}$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle GFB} = \frac{FK}{FC} S_{\triangle CEF} + S_{\triangle BEF} \Leftrightarrow S_{\triangle GEF} + S_{\triangle BEF} = \frac{FK}{FC} S_{\triangle CEF} + S_{\triangle BEF}$$

$$\Leftrightarrow S_{\triangle GEF} = \frac{FK}{FC} S_{\triangle CEF} \Leftrightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{S_{\triangle GEF}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{GN}{NC} (*)$$

Ta sẽ chứng minh (*) đúng. Thật vậy:

Áp dụng tỉ số lượng giác vào các tam giác vuông BFH, BFK, CHE, CEG ta có:

$$\frac{FH}{FK} = \frac{\tan \widehat{FBH}}{\tan \widehat{FBK}} = \frac{\tan \widehat{ECH}}{\tan \widehat{ECG}} = \frac{EH}{EG} \text{ do } \widehat{EBF} = \widehat{ECF} \text{ và } \widehat{ABI} = \widehat{ACI}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho:

$$+ \triangle GHK \text{ có cát tuyến là F, E, J: } \frac{KF}{FH} \cdot \frac{HE}{EG} \cdot \frac{GJ}{JK} = 1 \Rightarrow \frac{GJ}{JK} = 1$$

$$+ \triangle GCK \text{ có cát tuyến là F, J, N: } \frac{GN}{NC} \cdot \frac{CF}{FK} \cdot \frac{KJ}{JG} = 1 \Rightarrow \frac{GN}{NC} = \frac{FK}{FC} \text{ (do } \frac{GJ}{JK} = 1)$$

Vậy (*) đúng. Suy ra đpcm

Câu 5 (2 điểm) Trong hình chữ nhật có chiều dài bằng 149cm, chiều rộng bằng 40cm cho 2020 điểm phân biệt. CMR: tồn tại ít nhất 2 điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2cm.

Giải:

Ta chứng minh bài toán bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử không tồn tại 2 điểm nào mà khoảng cách nhỏ hơn hoặc bằng 2cm. Khi đó độ dài 2 điểm bất kỳ trong 2020 điểm đã cho đều lớn hơn hoặc bằng 2.

Xét 2020 hình tròn có tâm là các điểm đã cho có bán kính bằng 1cm. Do 2020 điểm trên nằm trong hình chữ nhật ABCD nên tất cả các hình tròn này sẽ nằm trong hình chữ nhật được mở rộng so với hình chữ nhật đã cho 1cm về mỗi phía.

Khi đó kích thước hình chữ nhật mới MNPQ sẽ là $(149+2.1) \times (40+2.1) = 151 \times 42\text{cm}$.

Do khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ $\geq 2\text{cm}$ nên các hình tròn này không bị chòem lên nhau (≤ 1 điểm chung). Khi đó diện tích tất cả các hình tròn này sẽ nhỏ hơn diện tích hình chữ nhật mới.

Mà diện tích 2020 hình tròn là: $2020 \cdot \pi R^2 = 2020\pi = 6242,8(\text{cm}^2)$ (lấy $\pi = 3,14$)

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là: $151 \cdot 42 = 6242(\text{cm}^2) < 6242,8(\text{cm}^2)$. Vô lý

Vậy điều giả sử là sai. Suy ra tồn tại ít nhất 2 điểm trong số 2020 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 2cm (đpcm)

