

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC: 2023 - 2024
MÔN CHUYÊN: TOÁN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề
(Đề thi gồm 01 trang, 07 câu)

Ngày thi: 04/06/2023

Câu 1. (2 điểm).

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

Tìm các giá trị x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2 \text{ thì } \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}.$$

Câu 2. (0,5 điểm): Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc trong hai lần gieo không lớn hơn 6.

Câu 3. (1 điểm): Lúc 7 giờ 30 phút hai xe ô tô cùng xuất phát từ A đến B với vận tốc của mỗi xe không thay đổi trên cả quãng đường. Xe thứ hai đến B sớm hơn xe thứ nhất đúng 1 giờ. Lúc quay trở về, xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km / h, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc như lúc đi nhưng dừng ở trạm nghỉ 36 phút, do đó xe thứ hai về đến A cùng lúc với xe thứ nhất. Biết rằng quãng đường từ A đến B là 180 km . Hỏi lúc đi, xe thứ nhất đến B lúc mấy giờ?

Câu 4 (1,0 điểm):

a) Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 + \frac{2}{3a}$

b) Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)} + \frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)} + \frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)} \geq 12.$$

Câu 5. (1,0 điểm):

a) Số nguyên dương m được gọi là số tốt nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng $6m+8$. Chứng minh rằng nếu có hai số a pq là số tốt thì $pq+2$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^{2025} + y^{2025} + y^{1350} + y^{675} = 2$

Câu 6. (1,0 điểm): Cho phương trình $x^2 - (m-4)x - m - 2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{x_1^2 + 2023} + x_1(m-8-x_1) = \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_2(m-x_2).$$

Câu 7. (3,5 điểm): Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là điểm M.

a) Chứng minh rằng $MB=MC=MI$.

b) Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng tứ giác AKFE nội tiếp.

c) Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng KP vuông góc với KD.

.....HẾT.....

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

LỜI GIẢI THAM KHẢO ĐỀ TOÁN (CHUYÊN)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TỈNH LÀO CAI NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1. (2 điểm).

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

Tìm các giá trị x để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $abc \neq 0$ và $a+b+c \neq 0$. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2 \text{ thì } \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}.$$

Lời giải.

a) Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(\frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+3} \right) \\ &= \left[\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} \right] \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq -2$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 1$$

Nên $-2 \leq P < 1$

$$P \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{-2; -1; 0\}$$

$$P = -2 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$P = -1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$P = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (Không thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; \frac{1}{4}\}$$

b) Từ $abc \neq 0 \Rightarrow a, b, c \neq 0$

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = -2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} + 1 + \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{c+a}{b} + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c} + \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ (Do } a+b+c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-c(a+b+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ c+ab+ac+bc=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ (c+a)(c+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \neq 0 \\ c=-a \neq 0 \\ c=-b \neq 0 \end{cases}$$

TH1: $a = -b \neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{-a^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} - a^{2023} + c^{2023}} = \frac{1}{a^{2023} + b^{2023} + c^{2023}}$$

Tương tự cho TH2, TH3 $\Rightarrow$ điều phải chứng minh

Câu 2. (0.5 điểm): Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất sao cho tổng số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc trong hai lần gieo không lớn hơn 6.

Lời giải.

Kí hiệu $(i;j)$ là sau khi gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp ta được lần thứ nhất xuất hiện mặt có số chấm là i , lần thứ hai xuất hiện mặt có số chấm là j (với $i, j \in \{1;2;\dots;6\}$)

$\Rightarrow$ Không gian mẫu $\Omega = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6), (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)\}$.

$\Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = 36$

Gọi A là biến cố: “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của con súc sắc trong hai lần gieo không lớn hơn 6”

$\Rightarrow A = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;2), (3;3), (4;1), (4;2), (5;1)\}$

$\Rightarrow$ Số phần tử của A là $n(A) = 15$

Vậy số xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Câu 3. (1 điểm): Lúc 7 giờ 30 phút hai xe ô tô cùng xuất phát từ A đến B với vận tốc của mỗi xe không thay đổi trên cả quãng đường. Xe thứ hai đến B sớm hơn xe thứ nhất đúng 1 giờ. Lúc quay trở về, xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km / h, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc như lúc đi nhưng dừng ở trạm nghỉ 36 phút, do đó xe thứ hai về đến A cùng lúc với xe thứ nhất. Biết rằng quãng đường từ A đến B là 180 km . Hỏi lúc đi, xe thứ nhất đến B lúc mấy giờ?

Lời giải.

Nếu lúc quay trở về mà hai xe cùng xuất phát một lúc thì ta có lời giải bên dưới

Gọi vận tốc của xe 1 là x (km/h), $x > 0$

Gọi vận tốc của xe 2 là y (km/h), $y > 0$

Khi đi hai xe cùng xuất phát và xe hai đến B sớm hơn xe một 1 giờ, ta có phương trình:

$$\frac{180}{x} = \frac{180}{y} + 1 \quad (1)$$

Khi trở về xe một tăng tốc thêm 5km/h, xe hai giữ nguyên vận tốc và dừng ở trạm nghỉ 36 phút và hai xe về đến A cùng lúc ta có phương trình: $\frac{180}{x+5} = \frac{180}{y} + \frac{36}{60} \quad (2)$

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được $\begin{cases} x = 45 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \\ y = 60 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases}$

Thời gian xe thứ nhất đi đến B là 4 giờ.

Vậy lúc đi xe thứ nhất đến B lúc 11 giờ 30 phút.

Nếu lúc quay trở về mà hai xe không cùng xuất phát một lúc thì ta có lời giải như sau.

Gọi vận tốc của xe 1 là x (km/h), $x > 0$

Gọi vận tốc của xe 2 là y (km/h), $y > 0$

Thời gian xe thứ nhất đi từ A đến B là $\frac{180}{x}$ (h)

Thời gian xe thứ hai đi từ A đến B là $\frac{180}{y}$ (h)

Thời gian xe thứ nhất đi từ B đến về A là $\frac{180}{x+5}$ (h)

Thời gian xe thứ hai đi từ B về A (tính cả thời gian nghỉ) là $\frac{180}{y} + \frac{36}{60}$ (h)

Vì lúc đi hai xe xuất phát cùng lúc và xe thứ hai đến B sớm hơn xe thứ nhất 1 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{180}{x} = \frac{180}{y} + 1 \quad (1)$$

Vì hai xe xuất phát cùng một thời điểm và về A cùng lúc nên tổng thời gian lúc đi và về của hai xe là bằng nhau nên ta có phương trình $\frac{180}{x} + \frac{180}{x+5} = \frac{180}{y} + \frac{180}{y} + \frac{36}{60} \Leftrightarrow \frac{180}{x} + \frac{180}{x+5} = 2 \cdot \frac{180}{y} + \frac{3}{5} \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta có

$$\frac{180}{x} + \frac{180}{x+5} = 2 \cdot \frac{180}{x} - 2 + \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{180}{x} - \frac{180}{x+5} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{900}{x(x+5)} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 7x^2 + 35x - 4500 = 0(*)$$

Ta có $\sqrt{\Delta} = \sqrt{127225}$

Phương trình (*) có 2 nghiệm $x = \frac{-35 + \sqrt{127225}}{14}$ (thỏa mãn)

$$X = \frac{-35 - \sqrt{127225}}{14} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Với $x = \frac{-35 + \sqrt{127225}}{14}$ thì $\frac{180}{y} = \frac{180}{x} - 1 \approx 6,8$ (giờ) (thỏa mãn điều kiện)

Câu 4 (1,0 điểm):

a) Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = a^2 + \frac{2}{3a}$

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)} + \frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)} + \frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)} \geq 12.$$

Lời giải.

a) Dự đoán Q đạt giá trị nhỏ nhất tại $a=3$.

$$\text{Ta có } Q = a^2 \frac{27}{a} + \frac{27}{a} - \frac{160}{3a}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số $a^2; \frac{27}{a}; \frac{27}{a}$ ta được:

$$a^2 + \frac{27}{a} + \frac{27}{a} \geq 3 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{27}{a} \cdot \frac{27}{a}} = 27$$

$$\text{Mà } a \geq 3 \Rightarrow 0 < \frac{160}{3a} \leq \frac{160}{9} \Rightarrow -\frac{160}{3a} \geq -\frac{160}{9}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{83}{9}$ tại $a=3$.

b) Ta đặt $x = \frac{3ab+1}{b}, y = \frac{3bc+1}{c}, z = \frac{3ca+1}{a} \Rightarrow x, y, z > 0$

$$\text{Đặt } P = \frac{a(3bc+1)^2}{c^2(3ac+1)} + \frac{b(3ca+1)^2}{a^2(3ab+1)} + \frac{c(3ab+1)^2}{b^2(3bc+1)} \Rightarrow P = \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P \geq \frac{(y+z+x)^2}{x+y+z} = x+y+z(1)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3a + \frac{1}{b} + 3b + \frac{1}{c} + 3c + \frac{1}{a} \\ &= \left(9a + \frac{1}{a}\right) + \left(9b + \frac{1}{b}\right) + \left(9c + \frac{1}{c}\right) - 6(a+b+c) \geq 2\sqrt{9a + \frac{1}{a}} + 2\sqrt{9b + \frac{1}{b}} + 2\sqrt{9c + \frac{1}{c}} - 6(a+b+c) \\ &= 6+6+6-6(a+b+c) \geq 18-6=12(2) \quad (\text{vì } a+b+c \leq 1). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 12$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{đpcm}$.

Câu 5.(1,0 điểm):

a) Số nguyên dương m được gọi là *số tốt* nếu tổng các bình phương của tất cả các ước dương của nó (không tính 1 và m) bằng $6m+8$. Chứng minh rằng nếu có hai số a, pq là số tốt thì $pq+2$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^{2025} + y^{2025} + y^{1350} + y^{675} = 2$

Lời giải.

a) Do p, q là các số nguyên nên pq có các ước dương là 1, p, q, pq .

Vì p, q là số tốt nên $p^2 + q^2 = 6pq + 8$ (1)

$$\Leftrightarrow pq + 2 = p^2 + q^2 - 5pq - 6 = p^2 + q^2 - 2pq - 3pq - 6 = (p-q)^2 - 3(pq+2)$$

$$\Leftrightarrow 4(pq+2) = (p-q)^2 \Rightarrow pq+2 = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1)} \Leftrightarrow (p-q)^2 = 4pq+8$$

$$\text{Do } 4pq+8 \vdots 2 \text{ nên } (p-q)^2 \vdots 2$$

$$\Rightarrow p-q \vdots 2 \quad (\text{Do } 2 \text{ là số nguyên tố})$$

$$\Rightarrow \frac{p-q}{2} \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow pq+2$ là số chính phương.

$$\text{b) } x^{2025} - y^{2025} + y^{1350} + y^{675} = 2. \text{ Đặt } x^{675} = m : y^{675} = n \Rightarrow y^{2025} = n^3 : y^{1350} = n^2$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ phương trình đã cho trở thành $m^3 = n^3 - n^2 - n + 2$

$$\text{Xét } (n-1)^3 - m^3 = -2n^2 + 4n - 3 = -2(n^2 - 2n + 1) - 1 - 2(n-1)^2 - 1 < 0$$

$$\text{Do } -2(n-1)^2 - 1 < 0 \text{ với mọi } n \Rightarrow (n-1)^3 < m^3 \quad (1)$$

$$\text{Xét } (n+3)^3 - m^3 = 10n^2 + 28n + 25 = 10\left(n^2 + \frac{14}{5}n + \frac{49}{25}\right) + \frac{27}{5} = 10\left(n + \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{27}{5}$$

$$\text{Do } 10\left(n + \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{27}{5} > 0 \text{ với mọi } n.$$

$$\text{Suy ra } (n+3)^3 > m^3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } (n+1)^3 < m^3 < (n+3)^3$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m^3 = n^3 \\ m^3 = (n+1)^3 \\ m^3 = (n+2)^3 \end{cases}$$

$$\text{*TH1: } m^3 = n^3 \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -2 \end{cases} \text{ Với } n = 1 \Rightarrow y^{675} = 1 \Rightarrow y = 1(TM)$$

Với $n = -2 \Rightarrow y^{675} = -2 \Rightarrow$ không có giá trị nào của $y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Thay $y=1$ vào phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow x^{2025} + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x^{2025} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1(TM)$$

$$\text{*TH2: } m^3 = (n+1)^3 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n - 1 = 0$$

$\Delta = 8$ không là số chính phương.

Suy ra không có giá trị $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{*TH3: } m^3 = (n+2)^3 \Leftrightarrow 7n^2 + 13n + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(7n+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ n = -\frac{6}{7} \end{cases} \quad (\text{loại vì } n \text{ không thuộc } \mathbb{Z})$$

$$\text{Với } n = -1 \Rightarrow y^{675} = -1 \Leftrightarrow y = -1(TM)$$

Thay $y=-1$ vào phương trình ban đầu ta có:

$$x^{2025} + 1 = 2 \Leftrightarrow x^{2025} = 1 \Leftrightarrow x = 1(TM)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1)\}$

Câu 6.(1,0 điểm): Cho phương trình $x^2 - (m-4)x - m - 2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{x_1^2 + 2023} + x_1(m-8-x_1) = \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_2(m-x_2).$$

Lời giải.

$$x^2 - (m-4)x - m - 2 = 0(1)$$

$$\Delta' = (m-4)^2 - 4(-m-2) = m^2 - 8m + 16 + 4m + 8 = m^2 - 4m + 24 = (m-2)^2 + 20 > 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Áp dụng định lí Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 4 \\ x_1 x_2 = -m - 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x_1^2 + 2023} + x_1(m-8-x_1) = \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_2(m-x_2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2023} + x_1(x_1 + x_2 - 4 - x_1) = \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_2(x_1 + x_2 - 4 - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2023} - \sqrt{x_2^2 + 2023} + x_1(x_2 - 4) - x_2(x_1 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} + x_1 x_2 - 4x_1 - x_1 x_2 - 4x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} - 4(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} \right) = 0(2)$$

Ta có: $\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023} > \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} = |x_1| + |x_2|$

$$x_1 - x_2 \leq |x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2|$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} < \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1| + |x_2|} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 2023} + \sqrt{x_2^2 + 2023}} - 4 < 0$$

$$(2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$.

Câu 7.(3,5 điểm): Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp tam giác ABC có tâm I và tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là điểm M.

- Chứng minh rằng $MB = MC = MI$.
- Đường thẳng DM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng tứ giác AKFE nội tiếp.

[TÊN TÁC GIẢ]

b) Xét hai tam giác MBD và MKB, ta có:

$$\widehat{MBD} = \widehat{MBC} = \widehat{MKB} \Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle MKB (g.g).$$

$$\widehat{M} \text{ (là góc chung)}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MK} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MK \cdot MD = MB^2 = MI^2 \Rightarrow \frac{MI}{MD} = \frac{MK}{MI}.$$

Xét hai tam giác MID và MKI, ta có:

$$\frac{MI}{MD} = \frac{MK}{MI} \Rightarrow \triangle MID \sim \triangle MKI (c.g.c).$$

$$\widehat{M} \text{ (là góc chung)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MKI} = \widehat{MID} (3)$$

Ta có: $\widehat{API} = \widehat{AEI} = 90^\circ \Rightarrow AP \perp PI$. Mà $AP \parallel BC \Rightarrow PI \perp BC$.

Mặt khác: $ID \perp BC$. Từ đó suy ra P, I, D thẳng hàng.

$$\Rightarrow \widehat{MID} = \widehat{AIP} = 90^\circ - \widehat{PAI} = 90^\circ - \widehat{PKI}.$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{MKI} = 90^\circ - \widehat{PKI} \Rightarrow \widehat{MKP} = 90^\circ$ hay $KP \perp KM$.