

Ngày thi: 20/9/2022

Hướng dẫn chấm gồm 05 trang

A) Hướng dẫn chung:

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của HDC.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm phải đảm bảo không làm sai lệch biểu điểm của HDC và phải được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- 3) Điểm của bài thi không làm tròn.

B) Hướng dẫn cụ thể:

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi $a_0 = 2$, $a_1 = 4$ và $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = 12$, với mọi n nguyên dương.

1. Xác định công thức tổng quát của dãy (a_n) .

2. Tính giới hạn (nếu có) của dãy số $(b_n)_{n \geq 1}$ cho bởi $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$.

Ý	Nội dung	Điểm
1.1	Bằng quy nạp, ta dễ dàng chỉ ra $a_n > 0$. Với mỗi n nguyên dương, ta đều có $a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \Leftrightarrow a_{n+1}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n(a_n + a_{n+2})$ $\Leftrightarrow \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n}.$	1,0
	Từ giả thiết, ta tính được $a_2 = 14$. Suy ra $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_0 + a_2}{a_1} = 4. \quad (1)$ Do đó $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ với mọi n nguyên dương.	1,0
	Dãy số trên có phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ với hai nghiệm $\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$. Từ đó, ta tính được $a_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}.$	1,0

1.2	Ta có $b_n = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{k-1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right).$	0,5
	Cách 1. Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + 1}{\lambda_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n + \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2}.$	1,0
	Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3} - 3}{24}.$	0,5
	Cách 2. Vì dãy (a_n) chỉ gồm toàn các số dương nên $\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{12}{a_n a_{n+1}} > 0.$ Suy ra dãy $\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$ giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{2}.$	0,5
	Kết hợp với (1), chuyển qua giới hạn, ta được $\ell + \frac{1}{\ell} = 4 \Rightarrow \ell = 2 - \sqrt{3}.$	0,5
	Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{2\sqrt{3} - 3}{24}.$	0,5

Bài 2 (5,0 điểm). Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

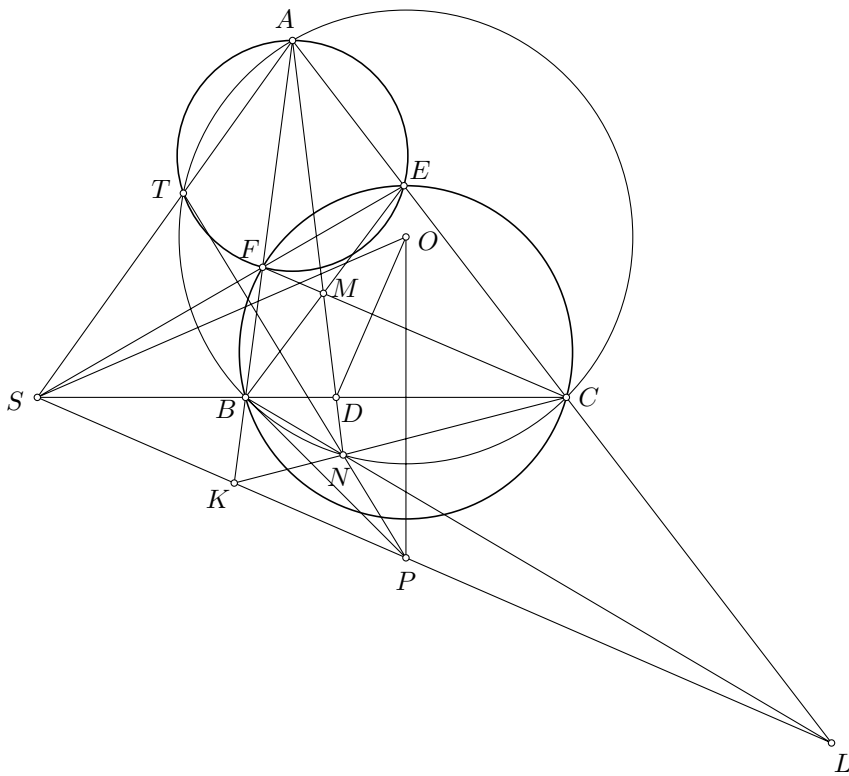
1. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.
2. Chứng minh $f(x)$ là đơn ánh và là hàm số lẻ.
3. Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn điều kiện đã cho.

Ý	Nội dung	Điểm
2.1	Thay $x = 0$, ta có $f(yf(0)) = f(0), \forall y \in \mathbb{R}$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì thay y bởi $\frac{z}{f(0)}$ với $z \in \mathbb{R}$ bất kì, ta được $f(z) = f(0)$, với mọi z . Suy ra f là hàm hằng. Thử lại không thỏa mãn.	0,75

	Thay $y = 0$, ta được $f(xf(x)) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Giả sử x_0 thỏa mãn $f(x_0) = 0$ thì $x_0^2 = f(x_0f(x_0)) = f(0) = 0$ hay $x_0 = 0$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.	(1) 0,75
2.2	Giả sử x_0, y_0 thỏa mãn $f(x_0) = f(y_0)$. Trong (1), thay x bởi x_0 , ta có $x_0^2 = f(x_0f(x_0)) = f(x_0f(y_0)) = f(x_0f(x_0 + y_0 - x_0))$ $= f((y_0 - x_0)f(x_0)) + x_0^2.$	1,0
	Do đó $f((y_0 - x_0)f(x_0)) = 0$, suy ra $(y_0 - x_0)f(x_0) = 0$, kéo theo $x_0 = y_0$ hay $f(x)$ là đơn ánh.	0,5
	Thay y bởi $-x$, ta được $f(-xf(x)) + x^2 = f(xf(0)) = 0$ hay $f(-xf(x)) = -x^2$. Thay x bởi $-x$, ta được $f(xf(-x)) = -x^2$, suy ra $f(-xf(x)) = f(xf(-x))$, mà f đơn ánh nên $-xf(x) = xf(-x)$, dẫn đến $f(x) = -f(-x)$ hay f là hàm lẻ.	0,5
2.3	Từ giả thiết, ta có $f(yf(x)) = -x^2 + f(xf(x+y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Áp dụng (2) và kết hợp f là hàm lẻ, ta có $f(yf(x)) = -x^2 + f(xf(x+y)) = -x^2 - f(-xf(x+y)) \quad (\text{do } f \text{ là hàm lẻ})$ $= -x^2 + (x+y)^2 - f((x+y)f(x+y-x)) \quad (\text{do (2)})$ $= y^2 + 2xy - f((x+y)f(y))$ $= y^2 + 2xy + f((-x-y)f(y)) \quad (\text{do } f \text{ là hàm lẻ})$ $= y^2 + 2xy - y^2 + f(yf(-x-y+y)) \quad \text{do (2)}$ $= 2xy + f(yf(-x)) = 2xy - f(yf(x)) \quad (\text{do } f \text{ là hàm lẻ})$ Kéo theo $f(yf(x)) = xy$.	1,0
	Tương tự, ta có $f(xf(y)) = xy = f(yf(x)), \forall x, y \in \mathbb{R}$, mà f đơn ánh nên $xf(y) = yf(x)$. Từ đó $\frac{f(x)}{x} (x \neq 0)$ là hàm hằng, từ đó $f(x) = cx$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thay vào giả thiết, ta tìm được $c \in \{\pm 1\}$. Vậy $f(x) = \pm x$.	0,5

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AC, AB tại E, F tương ứng. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi M là giao điểm của BE và CF ; S là giao điểm của BC và EF ; D và N lần lượt là giao điểm của AM với BC và (O) ($N \neq A$).

- Hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại P . Chứng minh T, N, P thẳng hàng.
- Gọi K là giao điểm của AB và CN . Chứng minh K nằm trên đường thẳng SP , từ đó chỉ ra D là trực tâm giác OSP .

Ý	Nội dung	Điểm
		
3.1	Các cặp đường tròn (AEF) và (BCE) , (BCE) và (O) , (O) và (AEF) lần lượt có trục đẳng phương là EF , BC , AT nên ba đường thẳng này đồng quy tại S hay A, T, S thẳng hàng.	1,0
	Theo tính chất của hàng điều hòa cơ bản thì $(SD, BC) = -1$	1,0
	Chiếu xuyên tâm A lên đường tròn (O) , ta được tứ giác $TBNC$ điều hòa, dẫn đến TN đi qua giao điểm P của các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) .	1,0
3.2	Áp dụng định lý Pascal cho bộ 6 điểm $\begin{pmatrix} A & B & N \\ C & T & B \end{pmatrix}$, ta được S, K, P thẳng hàng. Gọi L là giao điểm của BN và AC , chứng minh tương tự, ta được bốn điểm S, K, P, L thẳng hàng.	1,0
	Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $ABNC$, ta có D là trực tâm tam giác OKL , kéo theo $OD \perp SL$.	0,5
	Mà ta cũng có $SD \perp OP$ nên D là trực tâm tam giác OSP .	0,5

Bài 4 (5,0 điểm).

- Cho p là số nguyên tố khác 3 và số nguyên a sao cho $p \mid (a^2 + a + 1)$. Chứng minh rằng $p \equiv 1 \pmod{3}$.

2. Cho số nguyên dương m lớn hơn 1 sao cho m không có ước nguyên tố dạng $3t + 1$, $t \in \mathbb{N}$.
 Tìm tất cả các số nguyên dương a sao cho $1 + am^3$ là lập phương của một số nguyên và $1 + an^3$ không là lập phương của một số nguyên với mọi số nguyên dương $n < m$.

Ý	Nội dung	Điểm
4.1	Cách 1. Để thấy $a^2 + a + 1 = a(a+1) + 1$ là số lẻ nên $p \neq 2$. Do đó $p \mid a^2 + a + 1$ khi và chỉ khi $(2a+1)^2 + 3 \equiv 4(a^2 + a + 1) \equiv 0 \pmod{p}$.	1,0
	Áp dụng luật thuận nghịch bình phương, ta có $1 = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} = \left(\frac{p}{3}\right).$ Từ đó $p \equiv 1 \pmod{3}$.	1,0
	Cách 2. Do $p \mid a^2 + a + 1$ nên $a^3 \equiv 1 \pmod{p}$	0,5
	Theo định lí Fermat thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.	0,5
	Ta có $p \mid \gcd(a^{p-1} - 1, a^3 - 1) = a^{\gcd(p-1, 3)} - 1$ (hoặc $\text{ord}_p(a) \mid \gcd(p-1, 3) \mid 3$).	0,5
	Nếu $\gcd(p-1, 3) = 1$ (hay $\text{ord}_p(a) = 1$) thì $a \equiv 1 \pmod{p}$, suy ra $0 \equiv a^2 + a + 1 \equiv 3 \pmod{p}$, vô lí. Do đó $\gcd(p-1, 3) = 3$ hay $p \equiv 1 \pmod{3}$.	0,5
4.2	Giả sử $1 + am^3 = b^3$. Gọi p là ước nguyên tố bất kì của m . Nếu $p = 2$ thì b là số lẻ, suy ra $2 \nmid b^2 + b + 1$. (1)	0,5
	Với $p > 3$, thì $am^3 = (b-1)(b^2 + b + 1)$. Nếu $p \mid b^2 + b + 1$ thì theo ý 4.1, $p \equiv 1 \pmod{3}$, mâu thuẫn. Do đó $p \mid b-1$. (2)	0,5
	Từ (1) và (2), suy ra $m^3 \mid b-1$, do đó tồn tại t nguyên dương sao cho $b = 1 + tm^3$. Điều này dẫn đến $a = t(t^2m^6 + 3tm^3 + 3)$.	1,0
	Với $n < m$ nguyên dương, ta có $\begin{aligned} (tm^2n)^3 &< 1 + an^3 = 1 + 3tn^3 + 3t^2m^3n^3 + t^2m^6n^3 \\ &< 1 + 3tm^2n + 3t^2m^4n^2 + t^2m^6n^3 \\ &= (1 + tm^2n)^3. \end{aligned}$ Do đó $1 + an^3$ không là lập phương của một số nguyên với mọi $n < m$. Vậy $a = t(t^2m^6 + 3tm^3 + 3)$, $t \in \mathbb{N}^*$.	1,0

————HẾT————