

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022-2023

Môn thi: TOÁN (Chuyên Toán)

Ngày thi : 20/6/2022

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài I. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $x^2 - 4x + 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$
- 2) Cho các số thực a, b và c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}$$

Bài II. (2,0 điểm)

- 1) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1} - 7$ chia hết cho 20
- 2) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $y(x^2 + x + 1) = (x+1)(y^2 - 1)$

Bài III. (2,0 điểm)

- 1) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m+n}$ và $\frac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố
- 2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$

Bài IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại ba điểm D, E và F

- 1) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AI và DF . Chứng minh đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AI
- 2) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân
- 3) Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại điểm S . Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID

Bài V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x + y$ với $x \in A$ và $y \in B$ (x, y không nhất thiết phân biệt)

- 1) Chứng minh $68 \in B$
- 2) Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp

ĐÁP ÁN

Bài I. (2,0 điểm)**3) Giải phương trình** $x^2 - 4x + 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$ Điều kiện : $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành :

$$(x-1)^2 = (\sqrt{2x-1}-1)^2$$

Từ đây, ta có $x-1 = \sqrt{2x-1}-1$ hoặc $x-1 = 1-\sqrt{2x-1}$ Giải 2 phương trình và đối chiếu ta có $x=1$ **4) Cho các số thực a, b và c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị của biểu thức**

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}$$

$$\text{Do } ab+bc+ca=1 \Rightarrow \frac{a}{a^2+1} = \frac{a}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{a}{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{Chúng minh tương tự, ta có : } \frac{b}{b^2+1} = \frac{b}{(b+c)(b+a)}; \frac{c}{c^2+1} = \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

Ngoài ra cũng có $ab+bc+ca=1$ nên :

$$\frac{2}{a+b+c-abc} = \frac{2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc} = \frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Từ kết quả trên ta suy ra :

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} - \frac{2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{2(ab+bc+ca-1)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0 \end{aligned}$$

Vậy $P=0$ **Bài II. (2,0 điểm)****3) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20**Đặt $n=2k+1$ với k tự nhiên, khi đó ta có :

$$3^{2n+1}-7 = 3^{4k+3}-7 = 81^k \cdot 27-7 \equiv 27-7 \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow \text{đpcm}$$

4) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $y(x^2+x+1) = (x+1)(y^2-1)$

$$\text{Dễ thấy } (x^2+x+1; x+1) = (x(x+1)+1, x+1) = 1$$

Từ phương trình, ta suy ra $y(x^2 + x + 1)$ chia hết cho $x + 1$. Mà $(x^2 + x + 1, x + 1) = 1$ nên $y \vdots (x + 1)$

Đặt $y = k(x + 1)$ với k nguyên dương. Khi đó, từ phương trình đã cho, ta suy ra :

$$k(x^2 + x + 1) = y^2 - 1 = k^2(x + 1)^2 - 1. \text{ Do đó :}$$

$$1 = k^2(x + 1)^2 - k(x^2 + x + 1) > k^2(x + 1)^2 - k(x + 1)^2 = k(k - 1)(x + 1)^2 \geq 4k(k - 1). \text{ Suy ra } k < 2$$

Mà k là số nguyên dương nên $k = 1 \Rightarrow y = x + 1$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được :

$$x^2 + x + 1 = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x. \text{ Từ đó } x = 1 \Rightarrow y = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x, y) = (1, 2)$

Bài III. (2,0 điểm)

3) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\frac{m^3}{m+n}$ và $\frac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n$. Đặt $m^3 = p(m + n)$ với p là số nguyên tố. Từ đây, ta suy ra $m \vdots p$. Kết hợp với $m \geq n$, ta có :

$$p = \frac{m^3}{m+n} \geq \frac{m^3}{2m} = \frac{m^2}{2} \geq \frac{p^2}{2} \text{ hay } p \leq 2 \text{ mà } p \text{ nguyên tố nên } p = 2$$

Như vậy, dấu đẳng thức trong dãy đánh giá trên phải xảy ra, tức là phải có $m = n = p = 2$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn. Vậy có duy nhất 1 nghiệm $(m, n) = (2, 2)$

4) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + 2bc + 3ca - 3abc$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có :

$$P \leq ab + 2bc + 3ca = a(b + c) + 2c(a + b) \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{27}{4} \Leftrightarrow a = c = \frac{3}{2}, b = 0$$

The diagram illustrates a complex geometric construction. It features a set of points labeled $A, B, C, D, E, F, H, I, K, L, M, N, S$ connected by blue line segments. Two green circles are also shown: one centered at point I and another that passes through points M and N . The points are distributed such that A, B, C form a triangle on the left, with S below B . Points D, E, F, H are clustered in the upper-left region. Points I, N are near the center, while K, L are to the right. Points M and S are at the bottom. The blue lines connect these points in a way that suggests a series of geometric relationships, possibly related to the construction of a triangle or a specific geometric theorem. The green circles highlight specific geometric features, such as the center I and the points M and N on a common circle.

Vì thế $CM \perp AI$

5) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân

Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AI và DE. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh tam giác KMN là tam giác cân.

Chứng minh B, F, I, N, D cùng thuộc một đường tròn, suy ra $BN \perp AM \Rightarrow BN \parallel CM$.

Gọi H là giao điểm của BN và AC, J là giao điểm của CM và AB.

Ta có:

N là trung điểm của BH ($\triangle ABH$ cân) và M là trung điểm của CJ ($\triangle ACJ$ cân).

Suy ra $KN = \frac{1}{2}CH$; $KM = \frac{1}{2}BJ$; $CH = BJ$.

Do vậy $KN = KM \Rightarrow \triangle KMN$ cân

6) Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn $(K; KM)$ cắt nhau tại điểm S. Chứng minh đường thẳng AS song song với đường thẳng ID

Dựng đường cao AP thì ta có tứ giác APMC nội tiếp suy ra $\widehat{PMN} = \widehat{PCA}$.

Dễ nhận thấy $KN \parallel AC$ nên ta có $\widehat{PCA} = \widehat{NKP} \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{NKP}$.

Do đó tứ giác PMKN nội tiếp

Vì SM, SN là các tiếp tuyến của (K, KM) nên ta có S, M, K, N cùng thuộc đường tròn đường kính SK. Suy ra P, S, M, K, N cùng thuộc một đường tròn đường kính SK nên

$\widehat{SPK} = 90^\circ$, do đó $PS \perp BC$, mà $AP \perp BC$ suy ra A, P, S thẳng hàng.

Do $AS \perp BC$, $ID \perp BC \Rightarrow AS \parallel ID$ (đpcm).

Bài V. (1,0 điểm) Cho tập hợp A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90. Gọi B là tập hợp gồm các số có dạng $x+y$ với $x \in A$ và $y \in B$ (x, y không nhất thiết phân biệt)

3) Chứng minh $68 \in B$

Xét 34 cặp số $(1; 67); (2; 66); \dots; (34; 34)$ do tập A chứa 70 số nguyên dương không vượt quá 90 (A chỉ không chứa 20 số nguyên dương không vượt quá 90) nên có ít nhất 1 cặp số thuộc A . Từ đó ta có $68 \in B$.

4) Chứng minh B chứa 91 số nguyên liên tiếp

Ta sẽ chứng minh mọi số nguyên dương n với $42 \leq n \leq 90$, đều thuộc tập B .

- Với $42 \leq n \leq 90$: Giả sử $n \notin B$.
 - Nếu n là số lẻ, các cặp số $(n-1; 1); (n-2; 2); \dots; \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)$. Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A . Suy ra có ít nhất $\frac{n-1}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A , mâu thuẫn vì tập A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.
 - Nếu n là số chẵn, xét các cặp số $(n-1; 1); (n-2; 2); \dots; \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)$ và số $\frac{n}{2}$. Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A , ngoài ra $\frac{n}{2} \notin A$. Suy ra có ít nhất $\frac{n}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A , mâu thuẫn vì A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.
- Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với $42 \leq n \leq 90$, đều thuộc tập B .

- Với $91 \leq n \leq 140$: Giả sử $n \notin B$.

- Nếu n là số lẻ: xét các cặp số $(90; n-90); (89; n-89); \dots; \left(\frac{n-1}{2}; \frac{n+1}{2}\right)$. Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A . Suy ra có ít nhất $91 - \frac{n-1}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A , mâu thuẫn vì tập A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.
- Nếu n là số chẵn, xét các cặp số $(90; n-90); (89; n-89); \dots; \left(\frac{n+2}{2}; \frac{n-2}{2}\right)$ và số $\frac{n}{2}$. Vì $n \notin B$ nên mỗi cặp số đều có ít nhất một số không thuộc tập A , ngoài ra $\frac{n}{2} \notin A$. Suy ra có ít

nhất $91 - \frac{n}{2} \geq 21$ số nguyên dương không lớn hơn 90 không thuộc tập A , mâu thuẫn vì A gồm 70 số nguyên dương không vượt quá 90.

Như vậy, tất cả các số nguyên dương n với $91 \leq n \leq 140$, đều thuộc tập B .

- Từ hai kết quả trên, ta suy ra điều phải chứng minh.