

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021
MÔN TOÁN CHUYÊN**

Thời gian làm bài :150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2 điểm)

- 1) Giải phương trình: $x^2 + 3x + 5 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 5}$
- 2) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b - 2c = 0$ và $2ab - bc - ca = 0$. Chứng minh rằng : $a = b = c = 0$

Câu II. (2 điểm)

- 1) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $A = 11^n + 7^n - 2^n - 1$ chia hết cho 15
- 2) Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn : $\sqrt{11} - \frac{m}{n} > 0$.

$$\text{Chứng minh : } \sqrt{11} - \frac{m}{n} \geq \frac{3(\sqrt{11} - 3)}{mn}$$

Câu III. (2 điểm)

- 1) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1) = 3, P(3) = 7$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 4x + 3$
- 2) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca$

Câu IV. (3 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm I đến các đường thẳng BC, CA, AB . Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt D và M. Đường thẳng qua K song song với đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại N.

- 1) Chứng minh $\triangle MFD \sim \triangle BNK$
- 2) Gọi P là giao điểm của BI và FD. Chứng minh $\angle BMF = \angle DMP$
- 3) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC đi qua trung điểm của đoạn thẳng KN

Câu V. (1 điểm) Cho một bảng ô vuông kích thước 6×7 (6 hàng, 7 cột) được tạo bởi các ô vuông kích thước 1×1 . Mỗi ô vuông kích thước 1×1 được tô bởi 1 trong 2 màu đen hoặc trắng sao cho trong mọi ô vuông kích thước 2×3 hoặc 3×2 có ít nhất 2 ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen có chung cạnh

- a) Chỉ ra một cách tô sao cho $m = 20$
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất của m

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1) x^2 + 3x + 5 = (x+3)\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow x^2 + 5 + 3x - x\sqrt{x^2+5} - 3\sqrt{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+5} = 3 \\ \sqrt{x^2+5} = x \end{cases}$$

$$*) \sqrt{x^2+5} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$*) \sqrt{x^2+5} = x \Leftrightarrow x^2 + 5 = x^2 \text{ (ktm)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; 2\}$$

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{a+b}{2} = c \quad (1) \\ 2ab = c(a+b) \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có: } 2ab = \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow 4ab = (a+b)^2 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Thay } a = b \text{ vào (1) ta suy ra } a = b = c \text{ (đpcm)}$$

Câu II.

$$1) \text{ Ta có: } 11 \equiv 2 \pmod{3}, 7 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 11^n \equiv 2^n \pmod{3}, 7^n \equiv 1 \pmod{3} \\ \Rightarrow A = (11^n - 2^n) + (7^n - 1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow A : 3$$

$$\text{Lại có: } 11 \equiv 1 \pmod{5}, 7 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow 11^n \equiv 1 \pmod{5}, 7^n \equiv 2^n \pmod{5} \\ \Rightarrow A \equiv (11^n - 1) + (7^n - 2^n) \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow A : 5$$

Do $(3, 5) = 1$ nên ta có A chia hết cho 15.

$$2) \text{ Ta cần chứng minh } \sqrt{11}n - m \geq \frac{3(\sqrt{11}-3)}{m} \Leftrightarrow 11n^2 \geq m^2 + 6(\sqrt{11}-3)m + \frac{9(\sqrt{11}-3)^2}{m^2}$$

$$\text{Nếu } m = 1 \Rightarrow VP = 1 + 6(\sqrt{11}-3) + 9(\sqrt{11}-3)^2 < 11 \leq 11n^2$$

$$\text{Nếu } m = 2 \Rightarrow VP = 4 + 6(\sqrt{11} - 3) + \frac{9(\sqrt{11} - 3)}{4} < 11 \leq 11n^2$$

$$\text{Nếu } m \geq 3 \Rightarrow VP \leq m^2 + 6(\sqrt{11} - 3) + \frac{9(\sqrt{11} - 3)^2}{9} = m^2 + 2$$

Ta sẽ chứng minh $11n^2 \geq m^2 + 2 \Leftrightarrow 11n^2 - m^2 \geq 1$

Nếu $11n^2 - m^2 = 1$ thì m^2 chia cho 11 dư 10 tuy nhiên điều này không xảy ra (kiểm tra đồng dư, một số chính phương không thể chia 11 dư 10). Suy ra $11n^2 - m^2 \geq 2$

Vậy ta có đpcm

Câu III.

1) Đặt đa thức dư của phép chia $P(x)$ cho $x^2 - 4x + 3$ là $ax + b$. Khi đó ta có:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 - 4x + 3) + ax + b = Q(x)(x-1)(x-3) + ax + b(1), \text{ với } Q(x) \text{ là một đa}$$

thức. Do $P(1) = 3, P(3) = 7$, thay vào (1) ta có:
$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 7 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $x^2 - 4x + 3$ là $2x + 1$

2) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow ab \leq ac \leq bc$. Ta xét hai trường hợp:

$$TH1: bc < 1 \Rightarrow ab + bc + ca < 3$$

TH2: $bc \geq 1 \Rightarrow abc \geq a$. Khi đó, ta có đánh giá:

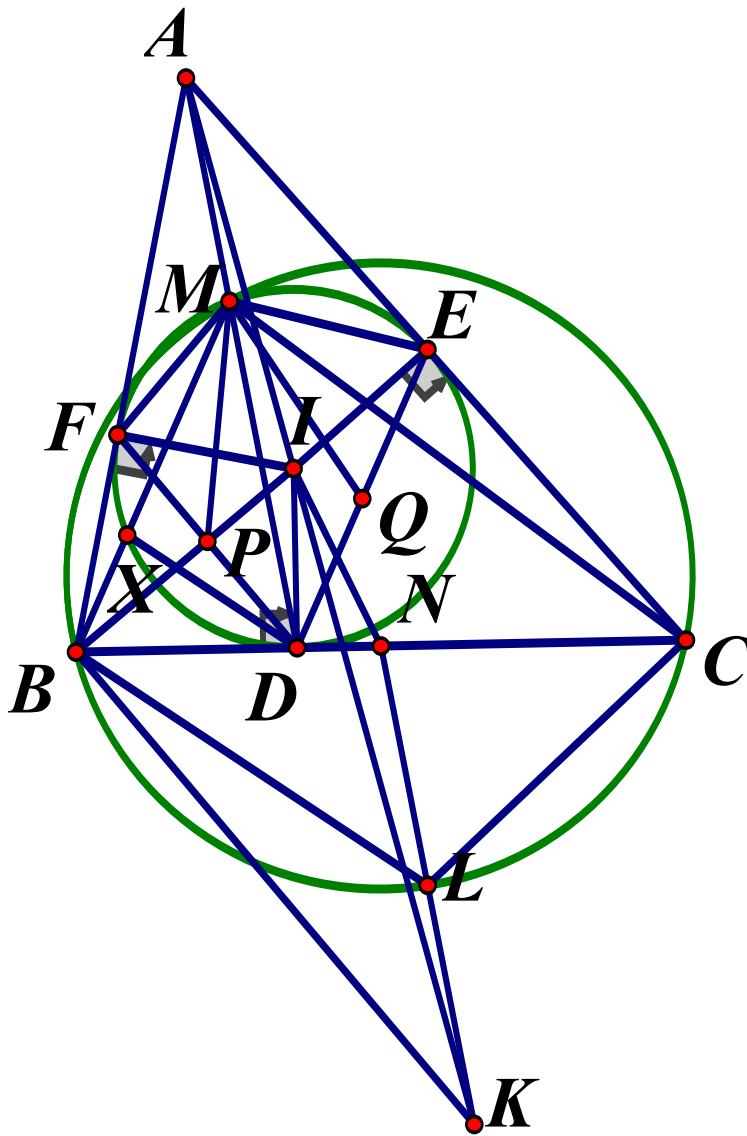
$$4 = a + b + c + abc \geq a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)} =$$

$$= 2\sqrt{a^2 + ab + bc + ca} = 2\sqrt{a^2 + P} \geq 2\sqrt{P} \Rightarrow P \leq 4$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a, b, c) = (0, 2, 2)$ và các hoán vị

Vậy $\text{Max } P = 4$, đạt được khi $(a, b, c) = (0, 2, 2)$ và các hoán vị

Câu IV.



1) Ta có : $BI \perp BK$ và $DF \perp BI \Rightarrow DF \parallel BK$

Suy ra $\angle FMD = \angle FDB = \angle NBK$

Lại có : $NK \parallel MD \Leftarrow \angle FDM = \angle BKN$. Vậy $\triangle MFD \sim \triangle BNK (g.g)$

2) Gọi X là giao điểm khác M của BM với (I)

Ta có : $\triangle BFX \sim \triangle BMF \Rightarrow \frac{FX}{FM} = \frac{BF}{BM}$. Tương tự: $\frac{DX}{DM} = \frac{BD}{BM}$

Lại có $BF = BD$ nên $\frac{FX}{FM} = \frac{DX}{DM} \Leftrightarrow DX.FM = FX.DM$

Gọi P' là điểm trên đoạn DF sao cho $\angle P'MD = \angle XMF$

Suy ra $\triangle P'MD \sim \triangle FMX, \triangle P'MF \sim \triangle DMX$

Suy ra $\frac{P'D}{FX} = \frac{MD}{MX}, \frac{P'F}{DX} = \frac{MF}{MX}$. Từ đó : $P'D = \frac{FX.MD}{MX} = \frac{MF.XD}{MX} = P'F$

Suy ra P' là trung điểm DF hay $P' \equiv P$

Vậy $\angle BMF = \angle DMP$

3) Gọi L là trung điểm của KN, Q là trung điểm của DE

Chứng minh tương tự câu b, ta cũng có $\angle EMQ = \angle CMD$

Từ câu a, ta có $\triangle MFD \sim \triangle BNM$, mà MP, BL là hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác trên nên $\angle BLN = \angle MPF$, tương tự: $\angle CLN = \angle MQE$. Suy ra :

$$\angle BLC = \angle BLN + \angle CLN = \angle MPF + \angle MQE = \angle PMQ + \angle PDQ$$

$$= \angle FME - \angle FMQ - \angle EMQ + \angle PDQ$$

$$= 180^\circ - \angle FMP - \angle EMQ = 180^\circ - \angle BMD - \angle CMD$$

$$= 180^\circ - \angle BMC$$

Vậy tứ giác $BMCL$ nội tiếp

Câu V.

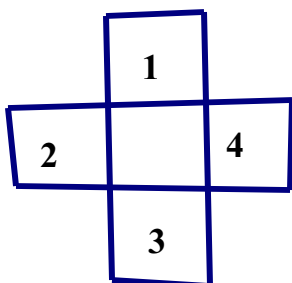
a) Ta có cách tô sau (ô nào dấu x là tô)

	x	x	x	x	x	
x	x		x		x	x
x	x		x		x	x
	x	x	x	x	x	

b) Xét 3 ô

Trong 3 ô này luôn có ít nhất 1 ô được tô màu đen

Xét 4 ô:



Trong 3 ô 1,2,3 có một ô tô đen. Giả sử ô 1 tô đen

Trong 3 ô 2,3,4 có một ô tô đen

⇒ Trong 4 ô này có ít nhất 2 ô được tô đen. Đánh số như hình vẽ sau:

8	1	8		7	2	7
1	8	1	6	2	7	2
	1	6	3	6	2	
	4	3	6	3	5	
4	10	4	3	5	9	5
10	4	10		9	5	9

Trong nhóm đánh số từ 1 đến 6: Mỗi nhóm có ít nhất hai ô được tô màu

Trong các nhóm được đánh số từ 7 đến 10: mỗi nhóm có ít nhất 2 ô được tô màu

Suy ra số ô được tô màu tối thiểu là $2 \times 6 + 4 = 16$ (ô)

Sau đây là một cách tô với $m = 16$ (ô tô màu là ô đánh x)

	X	X	X	X	X	
	X		X		X	
	X		X		X	
	X	X	X	X	X	