

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN
THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN NĂM 2024

Câu 1:

a) Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0 \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1} \end{cases}$$

Câu 2:

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy - yz - zx = 3$. Chứng minh $A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$

Câu 3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 8 thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-a} = \frac{5}{4}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)} + \frac{(4-b)^2}{(4-a)(4-c)} + \frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)}$$

Câu 4: Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G , tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF , K là giao điểm của OA và EF .

a) Chứng minh $HP.CE.BC = HC.BR.EP$

b) Chứng minh $JE = JF$ và $HJ \parallel DK$

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF , Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ . Chứng minh $NJ \perp EF$.

Câu 5: Cho lục giác đều có cạnh bằng 6cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm chung?

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 - 20x - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 6)(x^2 + 2x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 &= 0 \quad (\text{Vì } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 3 > 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $x \in \{1 + \sqrt{7}; 1 - \sqrt{7}\}$

b) Ta ký hiệu

$$\begin{cases} y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 = 0(1) \\ (2-x)(3y-4x+4) = 2(2y+1)\sqrt{2y+1}(2) \end{cases}$$

Ta biến đổi phương trình (1) như sau

$$\begin{aligned}y^2 - (y+2)x^2 + y - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y+2)(y-1-x^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow y \in \{-2; 1+x^2\} \\ \Rightarrow y = 1+x^2 \quad (\text{vì } y \geq -\frac{1}{2})\end{aligned}$$

Thay $y = x^2 + 1$ vào (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow (2-x)(3x^2 - 4x + 7) = 2(2x^2 + 3)\sqrt{2x^2 + 3}$$

Đặt $x - 2 = a$, $\sqrt{2x^2 + 3} = b (b \geq \sqrt{3})$. Ta biến đổi (3) như sau

$$\begin{aligned}(3) \Leftrightarrow (2-x)((x-2)^2 + 2x^2 + 3) &= 2(2x^2 + 3)\sqrt{2x^2 + 3} \\ \Leftrightarrow -a(a^2 + b^2) &= 2b^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + ab^2 + 2b^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + 2b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a+b &= 0 \quad (\text{vì } a^2 - ab + 2b^2 > b^2 > 0) \\ \Leftrightarrow x-2 + \sqrt{2x^2 + 3} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x-2)^2 = 2x^2 + 3 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} - 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5}, y = 10 + 4\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} - 2, y = 10 - 4\sqrt{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Thử lại các nghiệm trên đều thỏa mãn

Vậy tất cả các cặp (x, y) thỏa mãn là $\{(-2 - \sqrt{5}, 10 + 4\sqrt{5}); (\sqrt{5} - 2, 10 - 4\sqrt{5})\}$

Câu 2:

a) Theo giả thiết, thay $3 = xy - yz - zx$ vào biểu thức, ta có biến đổi như sau

$$\begin{aligned}
A &= (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3) \\
A &= (x^2 - xz - xy + yz)(y^2 - yz - xy + zx)(-z^2 - xy + yz + zx) \\
A &= (x - z)(x - y)(y - z)(x - z)(z - y)(y - x) \\
A &= ((x - y)(y - z)(z - x))^2
\end{aligned}$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên $(x - y)(y - z)(z - x)$ là số nguyên

Do đó A là số chính phương. Bài toán được chứng minh.

b) Giả sử tồn tại x, y nguyên thỏa mãn bài toán.

Đặt $y = x + d$ ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned}
3x^3 + 73xy + 2025 &= 3y^3 \\
\Leftrightarrow 3(3d^2x + 3dx^2 + d^3) &= 73x(x + d) + 2025 \\
\Leftrightarrow x^2(9d - 73) + x(9d^2 - 73d) + 3d^3 - 2025 &= 0
\end{aligned}$$

Xem như phương trình bậc 2 ẩn x , ta xét biệt thức Δ

$$\begin{aligned}
\Delta &= (9d^2 - 73d)^2 - 4(9d - 73)(3d^3 - 2025) \\
&= (9d - 73)(d^2(9d - 73) - 4(3d^3 - 2025)) \\
&= (9d - 73)(-3d^3 - 73d^2 + 2025 \cdot 4) \\
&= (9d - 73)(9 - d)(3d^2 + 100d + 900)
\end{aligned}$$

Vì $3d^2 + 100d + 900 = 3\left(d + \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{200}{3} > 0$ mà $\Delta \geq 0$ ta được $\frac{73}{9} \leq d \leq 9 \Rightarrow d = 9$

Thay vào phương trình ta được

$$8x^2 + 72x + 162 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình vô nghiệm nguyên.

Câu 3:

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a < b + c, b < a + c, c < a + b$ và $a + b + c = 8$ nên ta được $a, b, c < 4$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 4 - a \\ y = 4 - b \\ z = 4 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 4 > x, y, z > 0 \end{cases} \text{ viết lại giả thiết thành}$$

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{b+c-a} = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{5}{2}$$

Biến đổi biểu thức ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{(4-a)^2}{(4-b)(4-c)} + \frac{(4-b)^2}{(4-a)(4-c)} + \frac{(4-c)^2}{(4-a)(4-b)} \\ &= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz}{xyz} \\ &= \frac{64}{xyz} - 27 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwart

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} = \frac{4}{4-z} \\ \Leftrightarrow (z-2)(5z-4) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{5} &\leq z \leq 2 \end{aligned}$$

Tương tự ta được $\frac{4}{5} \leq x, y, z \leq 2$

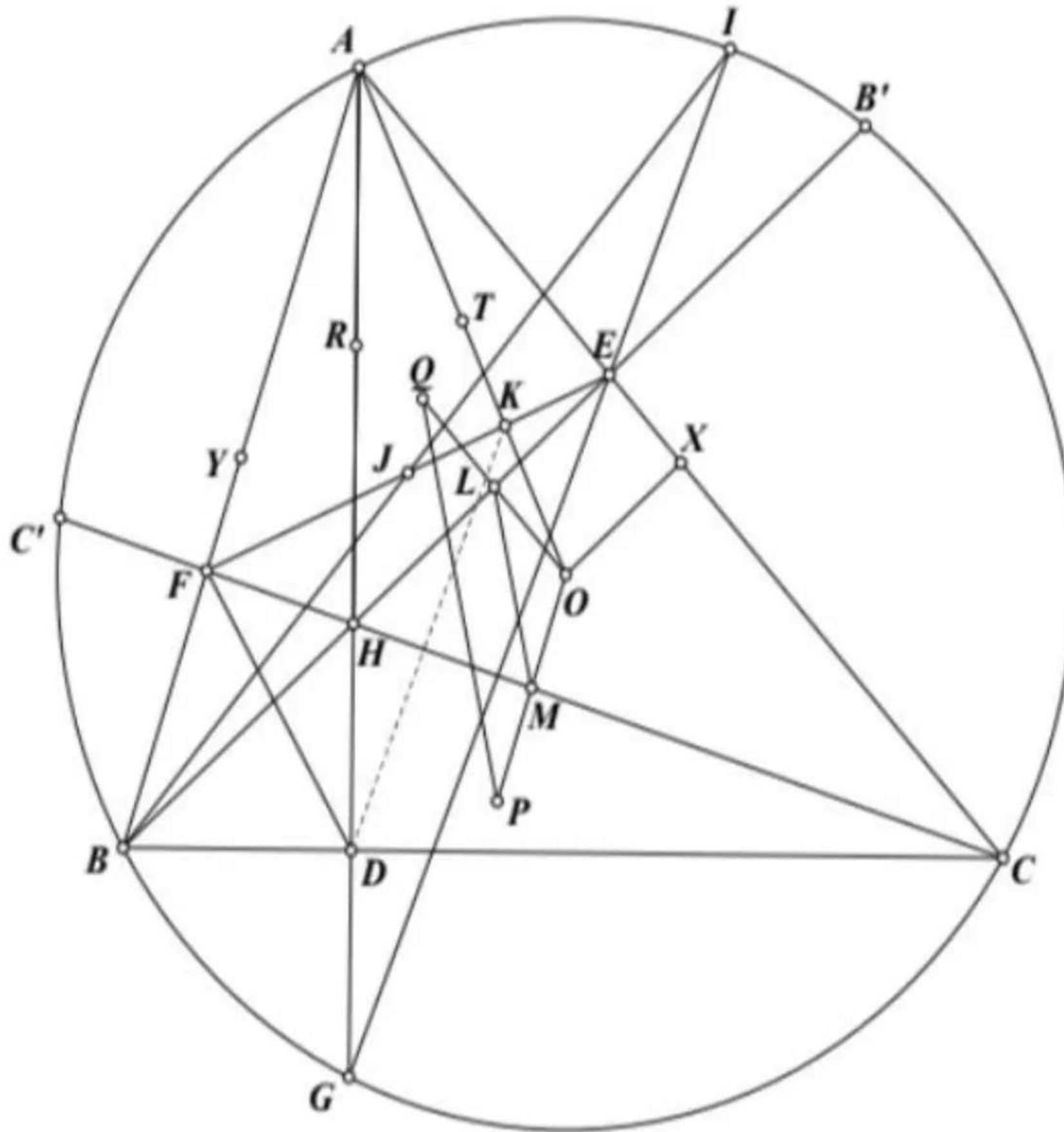
$$\text{Khi đó } \begin{cases} (2-x)(2-y)(2-z) \geq 0 \\ (5x-4)(5y-4)(5z-4) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq xyz \leq \frac{256}{125} \\ xy + yz + zx = \frac{5}{2}xyz \end{cases}$$

Khi đó ta được $\frac{17}{4} \leq P \leq 5$

Giá trị lớn nhất của $P = 5$

Dấu “=” xảy ra chẳng hạn khi $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ hay $(a, b, c) = (3, 3, 2)$

Câu 4:



a) Ta có: $BFC = BEC = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác CEFB nội tiếp

$$\Rightarrow HEF = HCB, FBH = ECH$$

Từ đây suy ra $\Delta HEF \sim \Delta HBC (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{HF}{HB}$$

Ta có biến đổi sau:

$$EF.HB = BC.HF$$

$$\Rightarrow HF.BC.CE = EF.HB.CE$$

Do đó để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra

$$HF.BC.CE = EF.HB.CE \Leftrightarrow HB.CE = HC.BF$$

Ta cũng có $\Delta FHB \sim \Delta EHC (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{HB}{BF} = \frac{HC}{CE} \Rightarrow HC.BF = CE.HB$$

Bài toán được chứng minh

b) Gọi R là trung điểm của AH, J' là trung điểm EF.

Vì $\angle AFH = \angle AEH$ nên tứ giác AEHF nội tiếp

$$\Rightarrow \angle BAH = \angle BEF$$

$$\Rightarrow \Delta BAH \sim \Delta BEF (g - g)$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BF}{FE} \Rightarrow \frac{BH}{HR} = \frac{BF}{FJ'}$$

Mà $\angle BFJ' = \angle BHR$ nên $\Delta BFJ' \sim \Delta BHR (c - g - c)$

$$\Rightarrow RBH = ABJ'$$

Ta có: $HA.HD = HB.HE$

$$\Rightarrow 2HR.HD = HB.HE$$

$$\Rightarrow HR.HG = HB.HE \text{ (vì H, G đối xứng nhau qua BC)}$$

Từ đây ta có RBGE nội tiếp

$$\Rightarrow RBH = HGE = AGI = FBJ$$

Do đó $J \equiv J'$ hay J là trung điểm của EF.

Gọi T là trực tâm tam giác AEF.

Ta có HELF là hình bình hành, T thuộc AO

Ta cũng có $\Delta AEF \sim \Delta ABC (c - g - c)$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AT}{AK}$$

Theo định lý Thales đảo, ta được $HT \parallel DK$ hay $HJ \parallel DK$

Bài toán được chứng minh

c) Gọi giao điểm của HB, HC với (O) lần lượt là B_1, C_1

OP cắt CF tại M, OQ cắt BE tại L

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, AB

Lúc này ta có

$$\begin{aligned} OY = FM = \frac{CH}{2} &\Rightarrow CM = CF - FM = CF - \frac{CH}{2} \\ &= FH + \frac{CH}{2} \\ &= \frac{C'H}{2} + \frac{CH}{2} \\ &= \frac{CC'}{2} \end{aligned}$$

Vì vậy M là trung điểm CC' , tương tự L là trung điểm BB'

Lại có NL là đường trung bình ứng với đỉnh Q của tam giác QPO

$$\Rightarrow NL = \frac{OP}{2} = MO$$

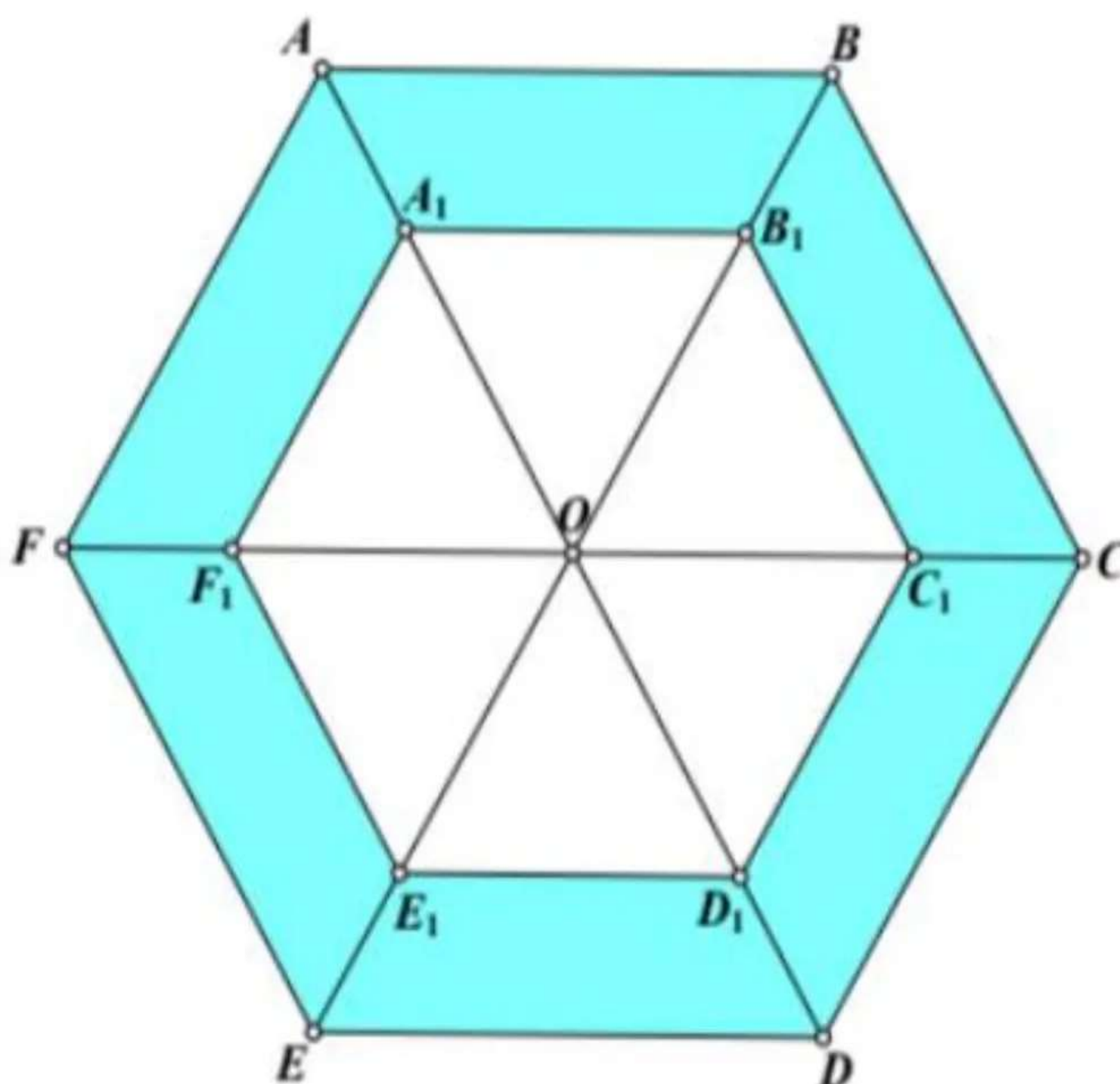
LEXO là hình chữ nhật $\Rightarrow LE = OX, LE \parallel OX, LN \parallel OM$

$$\Rightarrow NLE = MOX$$

$$\Rightarrow \triangle NLE = \triangle MOX$$

Mặt khác, $ABE = ACF \Rightarrow AB' = AC' \Rightarrow NE = NF \Rightarrow NJ \perp EF$

Câu 5:



Ta chứng minh kết quả của bài toán là phủ định, thật vậy

Xét hình lục giác đều ABCDEF, tâm O có cạnh bằng 6.

Giả sử có thể đặt vào trong hình lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2

Lấy các điểm $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ trên OA, OB, OC, OD, OE, OF thỏa mãn

$$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = 3,9$$

Gọi O_i là tâm đường tròn thứ i

Ký hiệu S là vùng diện tích được tạo bởi các điểm $A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, E_1, F, F_1$ (được tô bởi màu xanh lam)

Nhận xét: O_i không thuộc S với mọi $i = 1, 2, \dots, 7$

Chứng minh: Giả sử có $O_i \in S, O_i$ thuộc miền ABB_1A_1

Lúc này ta có

$$d(O_i, AB) = d(A_1B_1, AB) < AA_1 \cdot \sin 60^\circ < 2$$

Dẫn đến $(O_i, 2)$ không nằm trọn vẹn trong lục giác ABCDEF (vô lý)

Tại vì $(O_i, 2), (O_j, 2)$ không có điểm chung với mọi i, j nên ta có $O_i O_j \geq 4, \forall i, j$

Ta chia hình lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ thành 6 hình tam giác đều có cạnh bằng 3,9

$$OA_1B_1, \dots, OF_1A_1$$

Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại O_i, O_j cùng thuộc 1 hình tam giác, giả sử là OA_1B_1

Lúc này áp dụng định lý cosin cho tam giác OO_iO_j ta có

$$O_iO_j^2 = OO_i^2 + OO_j^2 - 2 \cos \angle OO_iO_j \cdot OO_i \cdot OO_j \leq OO_i^2 + OO_j^2 - OO_i \cdot OO_j \quad (1)$$

Để chỉ ra điều vô lý, ta đặt $OO_i = x, OO_j = y (x, y \leq 3,9)$

Lúc này:

$$x^2 + y^2 - xy \leq 3,9x + 3,9y - xy = 3,9^2 - (x - 3,9)(y - 3,9) \leq 3,9^2$$

Từ đây kết hợp với (1) và $O_iO_j \geq 4 \Rightarrow 4^2 \leq 3,9^2$ (vô lý)

Ta có đpcm.