

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi gồm có 1 trang

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (3 điểm)

Cho các số a, b thỏa mãn các điều kiện: $2a^2 + 7ab - 3b^2 = 0$, $b \neq 2a$, $b \neq -2a$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{8a - 3b}{2a - b} - \frac{2a - 5b}{2a + b}$.

Bài 2. (3 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2022$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2$$

Bài 3. (3 điểm)

Giải phương trình: $\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x$

Bài 4. (5 điểm)

Cho đường tròn (O) , đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O) (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC , AD lần lượt tại E và F . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF ; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH .

a) Chứng minh năm điểm E, C, D, F, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ECDF$. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O) .

Bài 5. (3 điểm)

Qua điểm M thuộc cạnh BC của $\triangle ABC$ ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC ; chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Bài 6. (3 điểm)

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ với $m \geq n$ sao cho $A = (m + n)^3$ là ước của

$$B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$$

HẾT.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (3 điểm)

Cho các số a, b thỏa mãn các điều kiện: $2a^2 + 7ab - 3b^2 = 0$, $b \neq 2a$, $b \neq -2a$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{8a - 3b}{2a - b} - \frac{2a - 5b}{2a + b}$.

Giải.

$$M = \frac{8a - 3b}{2a - b} - \frac{2a - 5b}{2a + b} = \frac{(8a - 3b)(2a + b) - (2a - b)(2a - 5b)}{(2a - b)(2a + b)} \quad (1đ)$$

$$= \frac{12a^2 + 14ab - 8b^2}{4a^2 - b^2} \quad (1đ)$$

$$= \frac{12a^2 + 2(3b^2 - 2a^2) - 8b^2}{4a^2 - b^2} = \frac{8a^2 - 2b^2}{4a^2 - b^2} = 2 \quad (1đ)$$

Bài 2. (3 điểm)

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2022$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2$$

Giải.

Ta có:

$$\sqrt{a^2 + 2022} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + \frac{2022}{a}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + b + c + \frac{bc}{a}} \quad (0,5đ)$$

$$a + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow a + b + c + \frac{bc}{a} \geq b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + 2022} \geq \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \quad (0,5đ)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\sqrt{b^2 + 2022} \geq \sqrt{b}(\sqrt{c} + \sqrt{a}) \text{ và } \sqrt{c^2 + 2022} \geq \sqrt{c}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad (0,5đ)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 2022} + \sqrt{b^2 + 2022} + \sqrt{c^2 + 2022}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}} \geq 2 \quad (0,5đ)$$

Bài 3. (3 điểm)

$$\text{Giải phương trình: } \frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x$$

Giải.

Điều kiện: $x \geq -1, x \neq 0$

$$\frac{4x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{5}{x} = x \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+1}-1) + \frac{5}{x} = x \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow 4x\sqrt{x+1} - 4x + 5 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 4(x+1) = 9 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x+1})^2 = 9 \quad (0,5đ)$$

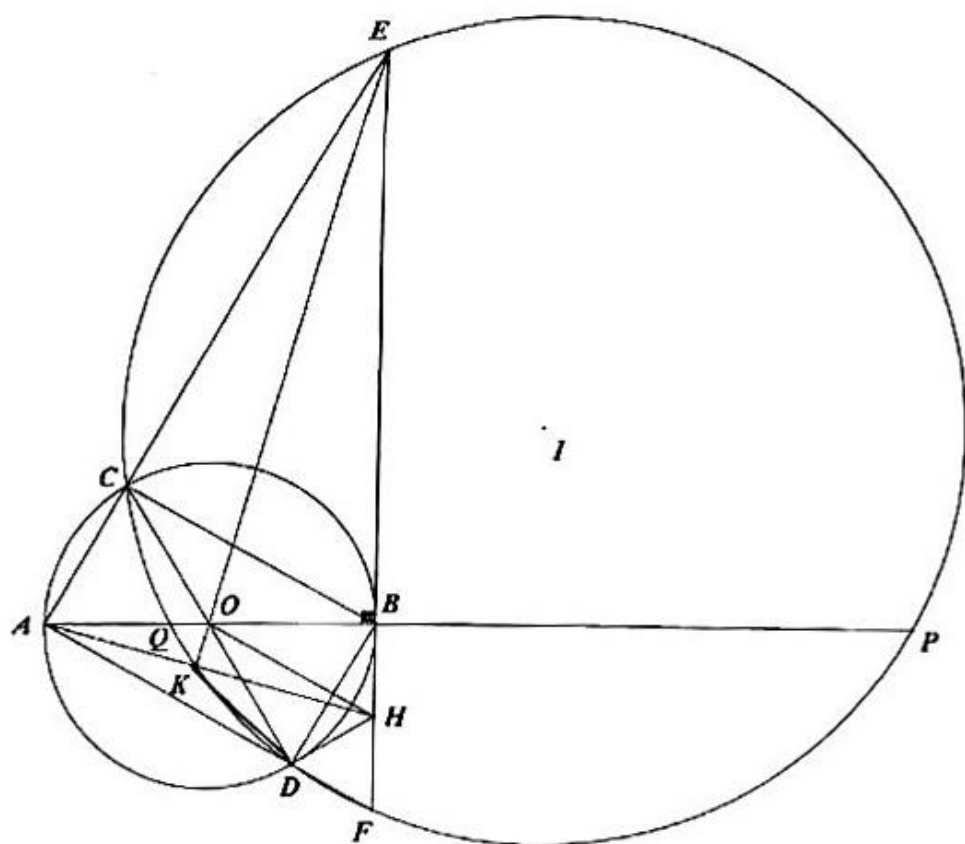
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-3 \\ 2\sqrt{x+1} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 + 2\sqrt{5} \quad (1,5đ)$$

Bài 4. (5 điểm)

Cho đường tròn (O) , đường kính AB cố định. Gọi C là điểm di động trên (O) (C khác A và B), vẽ đường kính CD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC , AD lần lượt tại E và F . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BF ; K là giao điểm của hai đường thẳng OE và AH .

a) Chứng minh năm điểm E , C , D , F , K cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ECDF$. Chứng minh điểm I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi C di động trên đường tròn (O) .



Giải.

a) Ta có $\widehat{CDA} = \widehat{CBA}$ (góc nội tiếp chắn cung AC của (O)).

Mà $\widehat{CBA} = \widehat{CEB}$ (cùng phụ với góc CAB), suy ra $\widehat{CDA} = \widehat{CEB}$.

Do đó tứ giác $CDFE$ nội tiếp.

(1)

(1đ)

Chúng minh được $HO \perp BD$, suy ra HO vuông góc với AC .

Chúng minh được O là trực tâm của tam giác AEH nên EO vuông góc với AH tại K .

Chúng minh được $OK.OE = OA.OB = OC.OD$. Suy ra $\triangle OEC$ đồng dạng với $\triangle ODK$ nên

$\widehat{OEC} = \widehat{ODK}$, suy ra tứ giác $ECKD$ nội tiếp. (2)

Từ (1) và (2) suy ra E, C, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.

(2đ)

b) Gọi P, Q thứ tự là giao điểm của đường tròn (I) với đường thẳng AB và $OA = R$.

Chúng minh được $OP.OQ = OC.OD = R^2$.

(3)

(0,5đ)

Chúng minh được $AP.AQ = AC.AE = AB^2 = 4R^2$.

Lại có

$$AP.AQ = (AO - OQ).(AO + OP) = R^2 + AO.(OP - OQ) - OP.OQ = R(OP - OQ)$$

Suy ra $OP - OQ = 4R$.

(4)

(1đ)

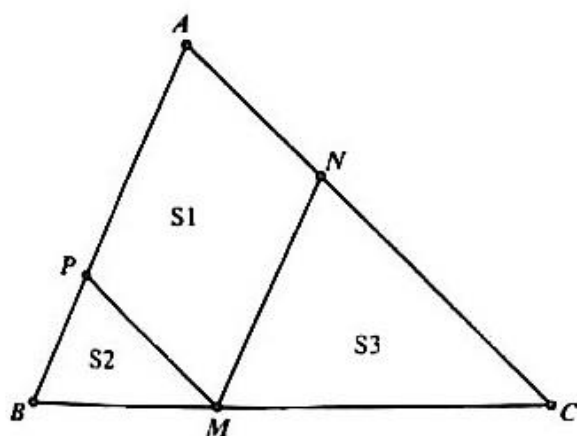
Từ (3) và (4) suy ra OP và OQ không đổi hay P, Q là các điểm cố định. Do đó I luôn di động trên đường thẳng cố định là trung trực của PQ .

(0,5đ)

Bài 5. (3 điểm)

Qua điểm M thuộc cạnh BC của $\triangle ABC$ ta kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AB, AC ; chúng tạo thành với hai cạnh ấy một hình bình hành. Tìm vị trí của M để hình bình hành đó có diện tích lớn nhất.

Giải.



Gọi S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích hình bình hành $MNAP$, $\triangle MBP$, $\triangle MCN$, $\triangle ABC$.

$BM = x, CM = y, BC = a$.

Ta có: $x, y, a > 0$ và $x + y = a$.

$\triangle MBP \sim \triangle CBA$

$$\Rightarrow \frac{S_2}{S} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow S_2 = \frac{x^2}{a^2} \cdot S \quad (0,5đ)$$

$\triangle MCN \sim \triangle BCA$

$$\Rightarrow \frac{S_3}{S} = \frac{y^2}{a^2} \Rightarrow S_3 = \frac{y^2}{a^2} \cdot S \quad (0,5đ)$$

$$\text{Suy ra } S_1 = S - (S_2 + S_3) = S \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) \quad (0,5đ)$$

$$= S \left(1 - \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2a^2} \right) = S \left(\frac{1}{2} - \frac{(x-y)^2}{2a^2} \right) \leq \frac{S}{2} \quad (1đ)$$

Suy ra giá trị lớn nhất của S_1 là $\frac{S}{2}$ khi M là trung điểm của BC . (0,5đ)

Bài 6. (3 điểm)

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m; n)$ với $m \geq n$ sao cho $A = (m + n)^3$ là ước của $B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$

Giải.

$$A \text{ là ước của } B \Rightarrow A \leq B \Rightarrow (m + n)^3 \leq 2n(3m^2 + n^2) + 8 \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Rightarrow (m - n)^3 \leq 8 \Rightarrow m - n \leq 2 \Rightarrow m - n \in \{0; 1; 2\} \quad (0,5\text{đ})$$

- Trường hợp $m - n = 0$, ta có

$$(2n)^3 / 2n(3n^2 + n^2) + 8 \Rightarrow 8n^3 / 8n^3 + 8 \Rightarrow n = 1 \quad (0,5\text{đ})$$

- Trường hợp $m - n = 1$, ta có

$$(2n + 1)^3 / 2n[3(n + 1)^2 + n^2] + 8 \Rightarrow (2n + 1)^3 / (2n + 1)^3 + 7 \Rightarrow n = 0 \quad (0,5\text{đ})$$

- Trường hợp $m - n = 2$, ta có

$$(2n + 2)^3 / 2n[3(n + 2)^2 + n^2] + 8 \Rightarrow (2n + 2)^3 / 8n^3 + 24n^2 + 24n + 8 \\ \Rightarrow (n + 1)^3 / (n + 1)^3 \Rightarrow n = k, \forall k \in \mathbb{N} \quad (0,5\text{đ})$$

$$\text{Vậy các cặp số } (m; n) \text{ thỏa mãn là } (1; 1), (1; 0) \text{ và } (k + 2; k), \forall k \in \mathbb{N} \quad (0,5\text{đ})$$