

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ ĐỀ THI CHÍNH THỨC	KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - MÔN TOÁN CHUYÊN NĂM HỌC 2022-2023 Thời gian làm bài : 150 phút
--	--

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot (x\sqrt{x} - \sqrt{x})$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm tất cả các số nguyên x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên

Câu 2. (1,5 điểm)

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 2$.

Gọi I là giao điểm của (d) và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $IA = 2IB$

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

- Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm

x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$ đạt giá trị lớn nhất

- Giải phương trình : $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O . Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn ($AB < AC$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF ; I là giao điểm thứ hai của KA với (O) ; M là trung điểm BC ; N là giao điểm thứ hai của AH và (O) . Chứng minh

- Tứ giác $AIFE$ là tứ giác nội tiếp
- Ba điểm M, H, I thẳng hàng
- Tứ giác $INMO$ là tứ giác nội tiếp
- Đường thẳng IN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi

Câu 5. (2,0 điểm)

- Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$
- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{x^2 + 15} + \frac{y}{y^2 + 15} + \frac{z}{z^2 + 15} \leq \frac{3 + x + y + z}{32}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot (x\sqrt{x}-\sqrt{x})$ (với $x \geq 0; x \neq 1$)

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot (x\sqrt{x}-\sqrt{x}) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \cdot \sqrt{x} = \frac{2x}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

d) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên
Ta có :

$$A = \frac{2x}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Để A là số nguyên thì $2\sqrt{x}$ và $\frac{2}{\sqrt{x}+1}$ phải là số nguyên

$$\text{Ta có } \frac{2}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0(tm) \\ x=1(ktm) \end{cases}$$

Thử lại, với $x=0 \Rightarrow A=0(tm)$

Vậy $x=0$ thì A nguyên

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

(d): $y = kx + 2$. Gọi I là giao điểm của (d) và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn

$$x_1 < x_2 \text{ và } IA = 2IB$$

Vì I là giao điểm của (d) và trục tung nên $I(0; 2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 = kx + 2 \Rightarrow x^2 - kx - 2 = 0(1)$$

Ta có : $\Delta = k^2 + 8 > 0$ với mọi k và $x_1 x_2 = -2 < 0$

Nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ với mọi k

Theo hệ thức Vi-et, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -2 \end{cases}$. Vì $IA = 2IB \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

Mà $x_1 < 0 < x_2$ nên $x_1 = -2x_2$. Ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2^2 = -2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy $k = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ta có :

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - y)(x + y) - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy - x + y - 1) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy - x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - (2y^2 - 1) - 1 = 0 \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x - 2y) = 0 \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -y \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = -1; y = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$(x; y) = \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right); (2; 1); \left(-1; -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

c) **Tìm m để phương trình** $3x^2 + 4(m-1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$ **(x là ẩn số) có hai nghiệm**

x_1, x_2 **sao cho biểu thức** $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$ **đạt giá trị lớn nhất**

Ta có $ac = -3m^2 - 12m - 15 = -3(m+2)^2 - 3 < 0, \forall m$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4-4m}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-m^2-4m-5}{3} \end{cases} \cdot \text{Đặt } t = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 \quad (t > 0)$$

$$\text{Lúc đó } P = -t - \frac{1}{t} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) \leq -2$$

$$\text{Vậy } \text{Max } P = -2 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow m = 1$$

d) **Giải phương trình :** $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$

Điều kiện : $x \geq -1$. Ta có :

$$(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6)\sqrt{(x+6)+6(x+1)} - [3(x^2 + 6) + 10(x+1)]\sqrt{x+1} = 0(1)$$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 + 6 \\ b = \sqrt{x+1} \end{cases} (a > 0, b \geq 0)$. Phương trình (1) trở thành :

$$a\sqrt{a+6b^2} - (3a+10b^2)b = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a+6b^2} = (3a+10b^2)b$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+6b^2) - [(3a+10b^2)b]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2b^2 - 60ab^4 - 100b^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b^2}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 - 60\frac{a}{b^2} - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 10b^2(tm) \Rightarrow x^2 + 6 = 10(x+1) \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{29}(tm) \\ \frac{a}{b^2} = -2(ktm) \\ \frac{a}{b^2} = -5(ktm) \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O . Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn ($AB < AC$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF ; I là giao điểm thứ hai của KA với (O) ; M là trung điểm BC ; N là giao điểm thứ hai của AH và (O) . Chứng minh



Đễ thấy tứ giác $BEFC$ nội tiếp nên $KF \cdot KE = KB \cdot KC$

Suy ra $KI.KA = KF.KE \Rightarrow AIFE$ là tứ giác nội tiếp

f) Ba điểm M, H, I thẳng hàng

Kẻ đường kính AT của đường tròn (O). Khi đó, $\angle AIT = 90^\circ$ (1)

Xét tứ giác $BHCT$, ta có $CF \parallel BT (\perp AB)$, $CT \parallel BE (\perp AC)$

Nên tứ giác $BHCT$ là hình bình hành

Suy ra M là trung điểm $HT \Rightarrow M, H, T$ thẳng hàng

Tứ giác $AFHE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AH

Ta có tứ giác $AIFE$ nội tiếp nên I thuộc đường tròn đường kính AH
 Hay $\angle AIH = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra I, H, T thẳng hàng. Vậy M, I, H thẳng hàng

g) Tứ giác $INMO$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $\angle NIT = \frac{1}{2} \angle NOT$ (3)

Ta có $\angle ANT = 90^\circ \Rightarrow NT \perp AN, BC \perp AN \Rightarrow NT \parallel BC$

Mà $OM \perp BC$ nên $OM \perp NT$

Xét $\triangle NOT$ có $ON = OT$ và $OM \perp NT$ nên OM là tia phân giác góc $\angle NOT$

Suy ra $\angle NOM = \frac{1}{2} \angle NOT$ (4)

Từ (3), (4) suy ra $\angle NIM = \angle NOM$

h) Đường thẳng IN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi

Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến đường tròn (O) tại B và OM . Suy ra S cố định

Ta cần chứng minh I, N, S thẳng hàng

Gọi L là giao điểm của IS và đường tròn (O)

Vì $\triangle OBS$ vuông nên $SB^2 = SM \cdot SO = SL \cdot SI$

Suy ra tứ giác $OMLI$ nội tiếp

Ta có tứ giác $OMLI$ và $OMNI$ cùng nội tiếp đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMI$ và cắt (O) tại giao điểm thứ hai là L và N nên N và L trùng nhau

Vậy I, N, S thẳng hàng hay IN đi qua S cố định

Câu 5. (2,0 điểm)

c) Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$

Ta có : $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x - 4 - y(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - y) + 2(x^2 - x + 1) = 2(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - y + 2) = 2(x - 1)(x - 3)$$

Biện luận theo x ta có các bộ số thỏa mãn $(x; y) \in \{(0; -4); (1; 3); (3; 5)\}$

d) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{x^2 + 15} + \frac{y}{y^2 + 15} + \frac{z}{z^2 + 15} \leq \frac{3 + x + y + z}{32}$$

$$\frac{x}{x^2 + 15} = \frac{x}{x^2 + 3 + 12} = \frac{x}{x^2 + xy + yz + zx + 12} = \frac{x}{(x+y)(x+z) + 12} \leq \frac{x}{4\sqrt{(x+y)(x+z)} + 8}$$

$$\leq x \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{1}{8} \right) \right] \left(\text{theo BDT } \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right)$$

$$\leq \frac{x}{16} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \right] \left(\text{theo BDT } \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \leq \frac{x}{32(x+y)} + \frac{x}{32(y+z)} + \frac{x}{32}$$

Tương tự : $\frac{y}{y^2+15} \leq \frac{y}{32(y+z)} + \frac{y}{32(z+x)} + \frac{y}{32}$; $\frac{z}{z^2+15} \leq \frac{z}{32(z+x)} + \frac{x}{32(x+y)} + \frac{z}{32}$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \\ & \leq \frac{x}{32(x+y)} + \frac{x}{32(y+z)} + \frac{x}{32} + \frac{y}{32(y+z)} + \frac{y}{32(z+x)} + \frac{y}{32} + \frac{z}{32(z+x)} + \frac{z}{32(x+y)} + \frac{z}{32} \\ & \leq \frac{3+x+y+z}{32} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \leq \frac{3+x+y+z}{32} \Leftrightarrow x=y=z=1$