

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

Năm học 2023-2024

Ngày thi thứ nhất. Thời gian 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Bài 1. a) Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(a;b)$. Cho $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$ sao cho $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Chứng minh $g(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ và $g(x) > 0, \forall x \in (a; x_1) \cup (x_2; b)$.

b) Với $a, b \in \mathbb{R}$ mà $a > 1, b \in (0;1)$, ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ cho bởi: $x_1 = b, x_{n+1} = a^{x_n} - 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ và dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn $y_n = \sum_{k=1}^n x_k, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Tìm $a > 1$ để với mọi $b \in (0;1)$ thì dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

Bài 2. Một số nguyên dương a được gọi là “đẹp” nếu tồn tại một hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(a) = f(2019), f(a+1) = f(2020), f(a+2) = f(2021), f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

a) Chứng minh nếu a là số nguyên dương đẹp và f là hàm số thỏa mãn điều kiện trong định nghĩa trên thì f là hàm tuần hoàn.

b) Tìm số nguyên dương a “đẹp” nhỏ nhất.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi tâm đường tròn bàng tiếp đỉnh B, C của tam giác ABC lần lượt là P, Q . Đường thẳng qua O vuông góc với PQ cắt (O) tại hai điểm M, N . Hai đường thẳng MP, MQ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai E, F . Hai đường thẳng NP, NQ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai K, L .

a) Chứng minh các đường thẳng KE, LF và MN đồng quy.

b) Tiếp tuyến tại E của (O) cắt BC tại X , tiếp tuyến tại F của (O) cắt BC tại Y . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY tiếp xúc với đường tròn (O) .

Bài 4. Ký hiệu $\varphi(n)$ là phi hàm Euler. Cho tập hợp T xác định bởi: $T = \{\varphi(n) : n = 1, 2, \dots\}$.

Giả sử a, d là hai số nguyên dương tùy ý. Xét tập hợp $S = \{a; a+d; a+2d; a+3d; \dots\}$.

Chứng minh số phần tử của tập hợp $T \cap S$ hoặc bằng 0, hoặc bằng 1, hoặc là vô hạn.

- HẾT -

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

Năm học 2023-2024

Ngày thi thứ hai. Thời gian 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Bài 5. Tồn tại hay không các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ với hệ số thực, khác hằng số, sao cho

$$(P(x))^{1011} + (P(x))^{1010} = (Q(x))^{2023} + (Q(x))^{2022}, \forall x \in \mathbb{R}?$$

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm của các đường tròn (BOC) , (COA) , (AOB) .

- Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.
- Gọi X, Y, Z là các điểm đối xứng của điểm O lần lượt qua các đường thẳng BC, CA, AB . Các tia AX, BY, CZ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai A_2, B_2, C_2 . Chứng minh các đường tròn (AA_1A_2) , (BB_1B_2) , (CC_1C_2) có hai điểm chung.

Bài 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , người ta đánh dấu một tập hợp A gồm 2023 điểm có tọa độ nguyên không âm. Ta gọi hai điểm là *kề nhau* nếu khoảng cách giữa chúng bằng 1. Gọi $N(A)$ là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ nguyên không âm mà kề với ít nhất một điểm thuộc A . Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của số phần tử của tập hợp $N(A)$.

- HẾT -

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN THI HSG QUỐC GIA
Môn: TOÁN. Năm học 2023-2024. Ngày thi thứ nhất.

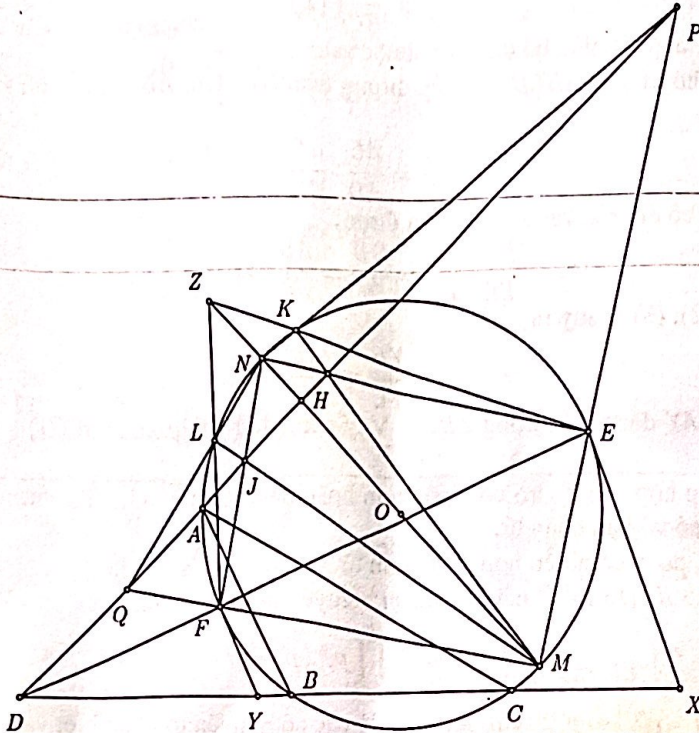
Câu	Nội dung	Điểm
1a) 1 đ	Vì $g''(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ nên $g'(x)$ đồng biến trên $(a; b)$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $g'(c) = 0$. Do $g'(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ nên ta có $g'(x) > 0, \forall x \in (c; b), g'(x) < 0, \forall x \in (a; c)$, mà $g(x_1) = g(x_2) = 0$ nên $g(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ và $g(x) > 0, \forall x \in (a; x_1) \cup (x_2; b)$.	1,0
1b) 4 đ	Trở lại bài toán chính, ta xét hàm số $f(x) = a^x - 1$, ta có: $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Để xét tính đơn điệu của dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, ta đặt $g(x) = f(x) - x = a^x - x - 1 \Rightarrow g''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vì $x_1 = b \in (0; 1)$ và b còn là tùy ý nên ta quan tâm $g(0) = a^0 - 0 - 1 = 0, g(1) = a - 2$. Ta xét hai trường hợp: Trường hợp 1: $a > 2$. Do $g''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0, g(1) = a - 2 > 0$ nên theo nhận xét ở trên (kết hợp phản chứng) thì ta có $\alpha \in (0; 1)$ để $g(x) > 0, \forall x \in (\alpha; +\infty)$. Do $f(x) > x, \forall x \in (\alpha; +\infty)$ nên nếu lấy $x_1 = b \in (\alpha; 1)$ thì $x_1 < f(x_1) = x_2 < f(x_2) = x_3 < \dots < x_k < f(x_{k+1})$ hay dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tăng, dẫn đến dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn vô hạn. Vậy $a > 2$ không thỏa mãn. Trường hợp 2: $1 < a \leq 2$. Do $g''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0, g(1) = a - 2 \leq 0$ nên theo nhận xét ở trên ta có $g(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$ hay $f(x) < x, \forall x \in (0; 1)$. Từ đó ta có $b = x_1 > f(x_1) = x_2 > f(x_2) > \dots > x_k > f(x_k) > \dots > 0$ hay dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0; b)$ và là dãy giảm, vì vậy ta xét $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k}$. Đặt $q = \frac{f(x_1)}{x_1}$, ta có $0 < q < 1$. Xét hàm số $h(x) = f(x) - qx$, ta có $h''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, h(0) = h(x_1) = 0$ nên theo nhận xét trên thì $h(x) \leq 0, \forall x \in (0; x_1]$. Do đó $\frac{f(x)}{x} \leq q < 1, \forall x \in (0; x_1]$, dẫn đến $0 < \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k} \leq q < 1, \forall k \in \mathbb{Z}^+$ hay $x_k \leq q^{k-1} x_1$. Từ đó $y_n = \sum_{k=1}^n x_k \leq x_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) < \frac{x_1}{1-q}$. Vậy dãy $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ là đơn điệu tăng, bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.	2,0đ
	Trường hợp 2: $1 < a \leq 2$. Do $g''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0, g(1) = a - 2 \leq 0$ nên theo nhận xét ở trên ta có $g(x) < 0, \forall x \in (0; 1)$ hay $f(x) < x, \forall x \in (0; 1)$. Từ đó ta có $b = x_1 > f(x_1) = x_2 > f(x_2) > \dots > x_k > f(x_k) > \dots > 0$ hay dãy $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0; b)$ và là dãy giảm, vì vậy ta xét $\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k}$. Đặt $q = \frac{f(x_1)}{x_1}$, ta có $0 < q < 1$. Xét hàm số $h(x) = f(x) - qx$, ta có $h''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, h(0) = h(x_1) = 0$ nên theo nhận xét trên thì $h(x) \leq 0, \forall x \in (0; x_1]$. Do đó $\frac{f(x)}{x} \leq q < 1, \forall x \in (0; x_1]$, dẫn đến $0 < \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k} \leq q < 1, \forall k \in \mathbb{Z}^+$ hay $x_k \leq q^{k-1} x_1$. Từ đó $y_n = \sum_{k=1}^n x_k \leq x_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) < \frac{x_1}{1-q}$. Vậy dãy $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ là đơn điệu tăng, bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.	2,0đ

	Vậy đáp số là $1 < a \leq 2$.	
2a) 1,5 đ	a) Giả sử a “đẹp” và hàm f thỏa mãn định nghĩa. Từ giả thiết ta có $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}. \quad (1)$ $f(n+2a) = f((n+a)+a) = \frac{f(n+a)-1}{f(n+a)+1} = \frac{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}-1}{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}+1} = -\frac{1}{f(n)}. \quad (2)$ $f(n+3a) = f((n+a)+2a) = -\frac{1}{f(n+a)} = -\frac{f(n)+1}{f(n)-1}. \quad (3)$ $f(n+4a) = f((n+2a)+2a) = -\frac{1}{f(n+2a)} = f(n). \quad (4)$ Chọn $k = 4a$ ($k \in \mathbb{Z}^+$), khi đó $f(n+k) = f(n) \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vậy ta có điều phải chứng minh.	1,5đ
2b) 3,5 đ	a) Giả sử a “đẹp” và hàm f thỏa mãn đề bài. Nếu $a = 1$, từ (2),(3) ta có: $f(1) = f(a) = f(2019) = f(3+504 \cdot 4a) = f(3) = f(1+2a) = -\frac{1}{f(1)}.$ Điều đó dẫn đến $f(1)^2 = -1$ (vô lí). Nếu $a = 2$, từ (1),(4) ta có: $f(2) = f(a) = f(2019) = f(3+252 \cdot 4a) = f(3) = f(a+1).$ $f(a+1) = f(2020) = f(4+252 \cdot 4a) = f(4) = f(2+a) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1}.$ Vậy nên $f(2) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1}$ hay $f(2)^2 = -1$ (vô lí). Vậy $a \geq 3$. Nếu hàm f thỏa mãn đề bài, từ (1),(2),(3) ta phải có $f(n) \neq 0; -1; 1 \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Với $a = 3$, ta xây dựng hàm f thỏa mãn đề bài. Chọn $f(1), f(2), f(3) \neq 0; 1; -1 \text{ và } \forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ thì } f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}.$ Từ (1),(2),(3) và (4) ta có: $f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}; f(n+6) = -\frac{1}{f(n)}; f(n+9) = -\frac{f(n)+1}{f(n)-1};$ $f(n+12) = f(n) \forall n \in \mathbb{Z}^+.$ Do $f(1), f(2), f(3) \neq 0; 1; -1 \forall n \in \mathbb{Z}^+$ nên dễ kiểm tra được $f(n) \neq 0; -1; 1 \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Ngoài ra, từ (1),(2),(3) và (4) ta hoàn toàn xác định được $f(n)$ với mọi n. Cuối cùng ta kiểm tra giá trị của $f(2019); f(2020); f(2021)$. Ta có: $f(2019) = f(3+168 \cdot 12) = f(3)$,	3,5đ

$f(2020) = f(4 + 168 \cdot 12) = f(4)$,
 $f(2021) = f(5 + 168 \cdot 12) = f(5)$.
 Vậy hàm f như trên thỏa mãn đề bài. Vậy $a = 3$ là số nguyên dương
 “đẹp” nhỏ nhất.

3a)
 1,5 đ

1,5đ



a) Vì MN là đường kính của (O) nên $\angle MLN = \angle MFN = 90^\circ$, tức là
 NF, ML là các đường cao của tam giác QMN . Do đó NF, ML và PQ đồng
 quy tại J . Gọi H là giao điểm của PQ và MN , Z là giao điểm của FL và MN .
 Khi đó:

$$(HZMN) = -1$$

Tương tự, nếu gọi giao điểm của EK và MN là Z' thì $(HZ'MN) = -1$. Suy
 ra Z trùng Z' hay EK, FL và MN đồng quy.

3b)
 3,5 đ

3,5đ

Trước hết ta chỉ ra rằng EF, BC và PQ đồng quy tại D . Thật vậy, vì $MO \perp$
 PQ nên

$$\angle MQP + \angle OMQ = 90^\circ = \angle OMF + \angle FEM$$

dẫn tới $\angle MQP = \angle MEF$ hay tứ giác $EFQP$ nội tiếp. Mặt khác, dễ thấy

$$\angle PBQ = \angle PCQ = 90^\circ$$

nên tứ giác $BPCQ$ nội tiếp đường tròn đường kính PQ . Do đó
 BC, EF và PQ đồng quy tại tâm đẳng phương D của (O) , $(BCPQ)$ và
 $(EFPQ)$.

Tiếp theo, để chỉ ra (AXY) tiếp xúc với (O) , ta chứng minh AX và AY đẳng
 giác trong $\angle BAC$. Điều này tương đương với

$$\frac{YB \cdot XB}{YC \cdot XC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

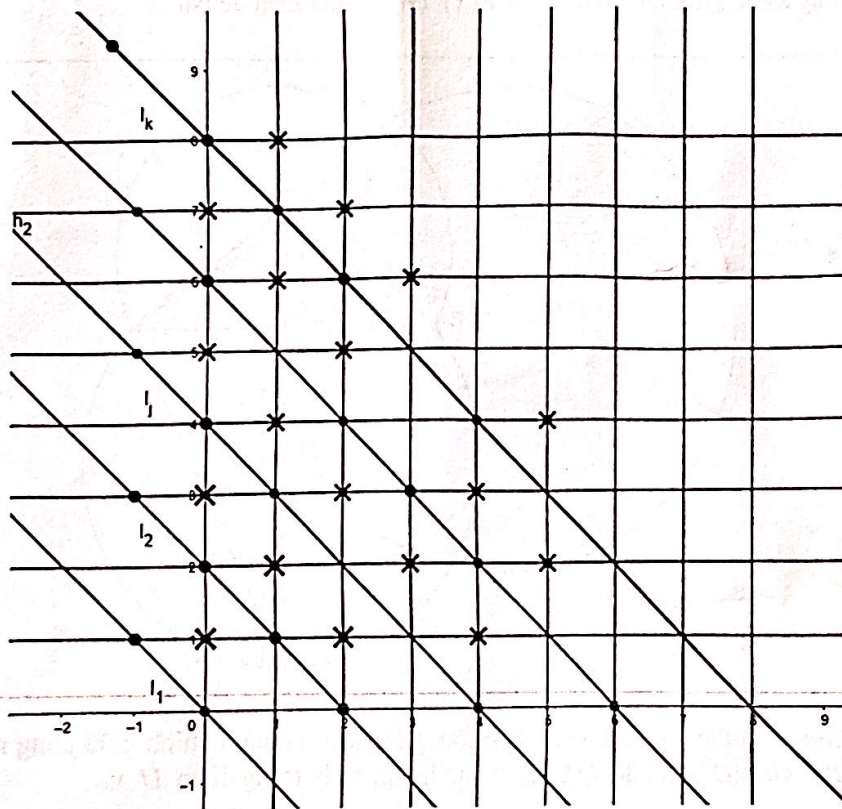
Vì FY là tiếp tuyến của (O) nên $\triangle FYB \sim \triangle CYF$, dẫn tới

	$\frac{YB}{YC} = \frac{YB}{YF} \cdot \frac{YF}{YC} = \frac{FB^2}{FC^2} \quad (1)$ Tương tự, ta có: $\frac{XB}{XC} = \frac{EB^2}{EC^2} \quad (2)$ Ngoài ra, ta phát biểu bổ đề quen thuộc sau: Bổ đề: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi AB cắt CD tại E. Khi đó $\frac{EC}{ED} = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{BC}{BD}$ Áp dụng bổ đề trên vào bài toán, ta được $\frac{EB}{EC} \cdot \frac{FB}{FC} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (3)$ Từ (1); (2); (3) ta suy ra $\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YB}{YC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ Hay AX, AY đẳng giác trong $\angle BAC$. Vậy nên (AXY) tiếp xúc với (O).	
4 5,0 đ	Giả sử tập hợp $A = T \cap S$ có nhiều hơn hoặc bằng hai phần tử. Ta chứng minh A có vô hạn phần tử. Thật vậy, do A có nhiều hơn một phần tử nên tồn tại $t \in A$ mà $t \geq a + d > d$. Do $t \in T$ nên tồn tại m nguyên dương sao cho $t = \varphi(m) = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i} (p_i - 1)$ Giả sử $m = p_1^{a_1+1} \cdots p_k^{a_k+1}$ với $p_1, \dots, p_k$ là các số nguyên tố phân biệt và $a_1, \dots, a_k$ là các số tự nhiên. Ta sẽ chứng minh tồn tại vô hạn phần tử thuộc T mà đồng dư với a theo mod d. Vì $t \equiv a \pmod{d}$ nên ta cần chỉ ra tồn tại vô hạn $x \in T$ mà $x \equiv t \pmod{d}$. Đặt $d = kp_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$ với $b_i \in \mathbb{N}$ và $\gcd(k; p_i) = 1 \forall i$. Do $t > d$ nên tồn tại chỉ số r để $b_r \leq a_r$ (nếu không thì $d \geq p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k} \geq p_1^{a_1+1} \cdots p_k^{a_k+1} > t$: mâu thuẫn). Xét $x_n = tp_r^{n\varphi(d)}$ với n nguyên dương. Dễ thấy $x_n \in T \forall n$. Tiếp theo ta chứng minh $x_n \equiv t \pmod{d}$. Do $a_r \geq b_r$ nên $p_r^{b_r} \mid t, t \mid x_n \forall n$. Đặt $k' = \frac{d}{p_r^{b_r}}$, khi đó $\varphi(d)$ chia hết cho $\varphi(k')$ nên theo định lý Euler ta có: $x_n = t \cdot p_r^{n\varphi(d)} \equiv t \pmod{k'}$ Mà $\gcd(k'; p_r) = 1$ nên $x_n \equiv t \pmod{d} \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vậy $x_n \in S$ với mọi n. Kết hợp với $x_n \in T$ suy ra $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A$ hay ta có điều phải chứng minh.	5,0đ

Môn: TOÁN. Năm học 2023-2024. Ngày thi thứ hai.

Môn: TOÁN. Năm học 2023-2024. Ngày thi thứ hai.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 5 7,0 đ	Giả sử $\exists P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P = p \geq 1$, $\deg Q = q \geq 1$ thỏa mãn điều kiện đã cho. Ta có $P^{1010}(P+1) = Q^{2022}(Q+1)$ (*) $\Rightarrow 1011p = 2023q \Rightarrow p = 2023n$ và $q = 1011n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$). Lấy đạo hàm hai vế của (*), ta có: $P' \cdot P^{1009}(1011P + 1010) = Q' \cdot Q^{2021}(2023Q + 2022) \quad (**)$ Dễ thấy $\begin{cases} \gcd(1011P + 1010; P+1) = 1 \\ \gcd(1011P + 1010; P) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \gcd(1011P + 1010; P^{1010}(P+1)) = 1$ $\Rightarrow \gcd(1011P + 1010; Q) = 1$ Từ (**) suy ra $(Q'(2023Q + 2022)) : (1011P + 1010)$. Ta lại có $0 < \deg(Q' \cdot (2023Q + 2022)) = 2022n - 1 < 2023n = \deg(1011P + 1010). \text{ Vô lí.}$ Vậy không tồn tại hai đa thức $P(x), Q(x)$ thỏa mãn đề bài.	7,0đ
6a) 3,0đ	Gọi I là điểm chính giữa cung lớn BC và J là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O). Khi đó I, O, X, A_1 thẳng hàng; O là trung điểm IJ và $OI^2 = OB^2 = OM \cdot OT = \frac{OX}{2} \cdot 2OA_1 = OX \cdot OA_1,$ Trong đó M là trung điểm BC, T là giao hai tiếp tuyến của (O) tại B và C.	3,0đ

	Vậy $\angle(IJXA_1) = \angle(IJXA_1) = -1$. Do đó AI, AJ là phân giác ngoài và phân giác trong của góc A, AX. Do vậy AA_1 và AX đẳng giác trong góc BAC. Tương tự BB_1 và BY đẳng giác trong góc ABC; CC_1 và CZ đẳng giác trong góc BCA. Vì AX, BY, CZ đồng quy tại tâm Euler O' của tam giác DEF nên AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác với O'.	
6b) 3,0đ	Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta chứng minh rằng AOA_2A_1 đồng viên. Thật vậy, ta có $\widehat{OA_1A} = \widehat{HAA_1} = \widehat{XAO} = \widehat{A_2AO} = \widehat{OA_2A}.$ Vậy AOA_2A_1 đồng viên. Do đó ba đường tròn $(AA_1A_2), (BB_1B_2), (CC_1C_2)$ có một điểm chung là O. Mặt khác AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại O', nên O' cùng phương tích với cả bốn đường tròn $(AA_1A_2), (BB_1B_2), (CC_1C_2)$ và (O). Vậy $(AA_1A_2), (BB_1B_2), (CC_1C_2)$ đồng trục OO' nên chúng còn có một điểm chung khác O nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.	3,0đ
Câu 7 7 đ	 Thay 2023 bằng số nguyên dương a bất kì. Gọi một điểm là điểm lẻ (tương ứng là chẵn) nếu tổng tọa độ của nó là lẻ (tương ứng là chẵn). Nhận xét 1: Các điểm mà có tổng tọa độ bằng nhau cùng nằm trên một đường thẳng. Nhận xét 2: Điểm chẵn chỉ kẻ với điểm lẻ và ngược lại. Giả sử các điểm thuộc A chỉ toàn là điểm chẵn. Khi đó mỗi điểm thuộc A sẽ nằm trên một trong các đường thẳng $l_1, l_2, \dots, l_k$ với $l_i: y = 2(x_i - 1) - x \quad \forall i \in \{1; 2; \dots; k\}$ và $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ nguyên dương.	7,0đ

Gọi a_i là số các điểm thuộc A nằm trên l_i , khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a$.
Nhận xét 3: Số các điểm lẻ nằm giữa hai đường thẳng l_i, l_{i+1} và kề với ít nhất một điểm thuộc A thì lớn hơn hoặc bằng $\max\{a_i + 1; a_{i+1} - 1\}$.

Thật vậy, gọi A_i là tập các điểm lẻ nằm giữa l_i, l_{i+1} và kề với ít nhất một điểm thuộc A . Do có a_i điểm thuộc l_i nên $|A_i| \geq a_i + 1$. Tương tự, như vậy, $|A_i| \geq a_{i+1} - 1$, khi đó nhận xét 3 được chứng minh

Nhận xét 4: Số điểm lẻ nằm trên mặt phẳng bờ là đường thẳng l_1 chứa gốc tọa độ O mà kề với ít nhất một điểm thuộc A lớn hơn hoặc bằng $a_1 - 1$ và số điểm lẻ nằm trên mặt phẳng bờ là đường thẳng l_k không chứa gốc tọa độ O mà kề với ít nhất một điểm thuộc A lớn hơn hoặc bằng $a_k + 1$.

Từ nhận xét 3 và 4 suy ra

$$|N| \geq a_1 - 1 + \max\{a_1 + 1; a_2 - 1\} + \dots + \max\{a_{k-1} + 1; a_k - 1\} + a_k + 1$$

Với mỗi $j \in \{1, \dots, k\}$, ta có:

$$\begin{aligned} |N| &\geq a_1 - 1 + a_2 - 1 + \dots + a_j - 1 + a_j + 1 + \dots + a_{k-1} + 1 + a_k + 1 \\ &= (a_2 + a_3 + \dots + a_k) + a_j + k - 2j + 1 \\ &= a + a_j + k - 2j + 1 \end{aligned}$$

Tương tự, ta suy ra:

$$k|N| \geq ka + (a_1 + \dots + a_k) + k^2 - 2(1 + \dots + k) + k = (k+1)a$$

$$\text{Vậy } |N| \geq a + \frac{a}{k}.$$

Lại có: $|N| \geq a_1 + 1 + a_2 + 1 + \dots + a_k + 1 = a + k$ suy ra $k \leq |N| - a$.

Nếu $|N| < a + \sqrt{a}$ thì $k < \sqrt{a}$, dẫn đến $|N| \geq a + \sqrt{a}$ (mâu thuẫn).

$$\text{Vậy } |N| \geq a + \sqrt{a}.$$

Tương tự với trường hợp trong A chỉ toàn điểm lẻ.

Xét trường hợp trong A có a_c điểm chẵn và a_l điểm lẻ. Khi đó số điểm chẵn mà kề với ít nhất một điểm lẻ trong A lớn hơn hoặc bằng $a_l + \sqrt{a_l}$, số điểm lẻ mà kề với ít nhất một điểm chẵn trong A lớn hơn hoặc bằng $a_c + \sqrt{a_c}$.

$$\text{Suy ra } |N| \geq a_l + a_c + \sqrt{a_l} + \sqrt{a_c} \geq a_l + a_c + \sqrt{a_l + a_c} = a + \sqrt{a}.$$

Trở lại với trường hợp $a = 2023$, khi đó $\lceil \sqrt{a} \rceil + 1 = 45$ nên $|N| \geq 2068$.

Dựng trường hợp dấu bằng xảy ra: Đánh dấu tất cả 44^2 điểm chẵn trên các đường thẳng đi qua hai điểm. Và đánh dấu 87 điểm đầu tiên trên đường thẳng đi qua hai điểm $(0; 2n), (2n; 0)$ với $n \in \{1; 2; \dots; 43\}$. Và đánh dấu 87 điểm trên đường thẳng đi qua $(0; 88), (88; 0)$ trừ hai điểm $(0; 88)$ và $(88; 0)$.

Hết