

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

Năm học 2023-2024

Ngày thi thứ nhất. Thời gian 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Bài 1. a) Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(a;b)$. Cho $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_1 < x_2$ sao cho $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Chứng minh $g(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$ và $g(x) > 0, \forall x \in (a; x_1) \cup (x_2; b)$.

b) Với $a, b \in \mathbb{R}$ mà $a > 1, b \in (0;1)$, ta xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ cho bởi: $x_1 = b, x_{n+1} = a^{x_n} - 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ và dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn $y_n = \sum_{k=1}^n x_k, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Tìm $a > 1$ để với mọi $b \in (0;1)$ thì dãy $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

Bài 2. Một số nguyên dương a được gọi là “đẹp” nếu tồn tại một hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(a) = f(2019), f(a+1) = f(2020), f(a+2) = f(2021), f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

a) Chứng minh nếu a là số nguyên dương đẹp và f là hàm số thỏa mãn điều kiện trong định nghĩa trên thì f là hàm tuần hoàn.

b) Tìm số nguyên dương a “đẹp” nhỏ nhất.

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi tâm đường tròn bàng tiếp đỉnh B, C của tam giác ABC lần lượt là P, Q . Đường thẳng qua O vuông góc với PQ cắt (O) tại hai điểm M, N . Hai đường thẳng MP, MQ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai E, F . Hai đường thẳng NP, NQ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai K, L .

a) Chứng minh các đường thẳng KE, LF và MN đồng quy.

b) Tiếp tuyến tại E của (O) cắt BC tại X , tiếp tuyến tại F của (O) cắt BC tại Y . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY tiếp xúc với đường tròn (O) .

Bài 4. Ký hiệu $\varphi(n)$ là phi hàm Euler. Cho tập hợp T xác định bởi: $T = \{\varphi(n): n = 1, 2, \dots\}$.

Giả sử a, d là hai số nguyên dương tùy ý. Xét tập hợp $S = \{a; a+d; a+2d; a+3d; \dots\}$.

Chứng minh số phần tử của tập hợp $T \cap S$ hoặc bằng 0, hoặc bằng 1, hoặc là vô hạn.

- HẾT -

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

Năm học 2023-2024

Ngày thi thứ hai. Thời gian 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Bài 5. Tồn tại hay không các đa thức $P(x)$, $Q(x)$ với hệ số thực, khác hằng số, sao cho

$$(P(x))^{1011} + (P(x))^{1010} = (Q(x))^{2023} + (Q(x))^{2022}, \forall x \in \mathbb{R}?$$

Bài 6. Cho tam giác nhọn ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là tâm của các đường tròn (BOC) , (COA) , (AOB) .

- Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.
- Gọi X, Y, Z là các điểm đối xứng của điểm O lần lượt qua các đường thẳng BC, CA, AB . Các tia AX, BY, CZ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các giao điểm thứ hai A_2, B_2, C_2 . Chứng minh các đường tròn (AA_1A_2) , (BB_1B_2) , (CC_1C_2) có hai điểm chung.

Bài 7. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , người ta đánh dấu một tập hợp A gồm 2023 điểm có tọa độ nguyên không âm. Ta gọi hai điểm là *kề nhau* nếu khoảng cách giữa chúng bằng 1. Gọi $N(A)$ là tập hợp tất cả các điểm có tọa độ nguyên không âm mà kề với ít nhất một điểm thuộc A . Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của số phần tử của tập hợp $N(A)$.

- HẾT -