SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2021 - 2022
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang)*	**Môn thi: TOÁN** **Thời gian: 180 phút** (*không kể thời gian giao đề*) **Ngày thi: 18/11/2021**

Câu 1. (***3,0 điểm***) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+7x+2y\sqrt{2-y}=3\left(2x^2+1\right)+5\sqrt{2-y} \\ \sqrt{2x^2-4x+3}+x=\sqrt{y+3}+5 \end{cases}$

Câu 2. (***2,0 điểm***) Cho số thực $a\neq 0$ và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1=a \text{ và } x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{2(n+1)}{n\,x_n} \text{ với } n=1,2,...$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. (***5,0 điểm***) Cho đường tròn (*O*) và dây *BC* cố định khác đường kính. Điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC* của (*O*) sao cho tam giác *ABC* nhọn, không cân. Đường tròn tâm *J* bàng tiếp góc *A* của tam giác *ABC* tiếp xúc với *BC*, *CA*, *AB* lần lượt tại *D*, *E*, *F*. Gọi *M*, *N* lần lượt là giao điểm của *EF* với *JB*, *JC*.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác *DMN* đi qua trung điểm của *BC*.

b) Gọi *P* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *AMN* và (*O*). Gọi *Q* là giao điểm thứ hai của *AD* và (*O*). Chứng minh rằng *PQ* luôn đi qua một điểm cố định khi *A* di chuyển trên cung lớn *BC* của (*O*).

Câu 4. (***2,0 điểm***) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $3^{p-1}-1$ chia hết cho *p* và thương là một số chính phương.

Câu 5. (***3,0 điểm***) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x).f(y)+f(xy-1)=2xy-1 \text{ với mọi số thực } x,y.$$

Câu 6. (***2,0 điểm***) Gọi *S* là tập hợp gồm 2021 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số (a,b,c) thỏa mãn điều kiện a,b,c thuộc S và $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 9 ?

Câu 7. (***3,0 điểm***) Cho các số thực không âm *x*, *y*, *z* thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}$.

..... HẾT .....

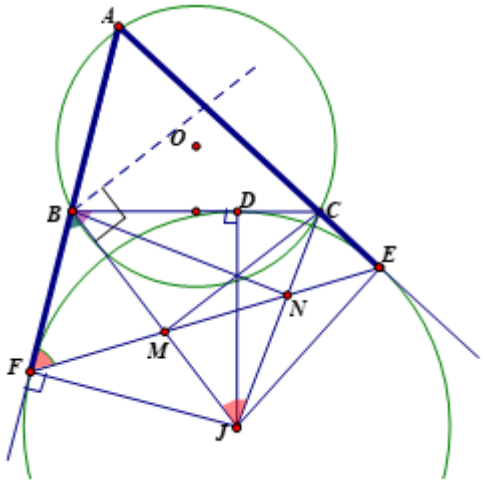
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.)
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh: .....

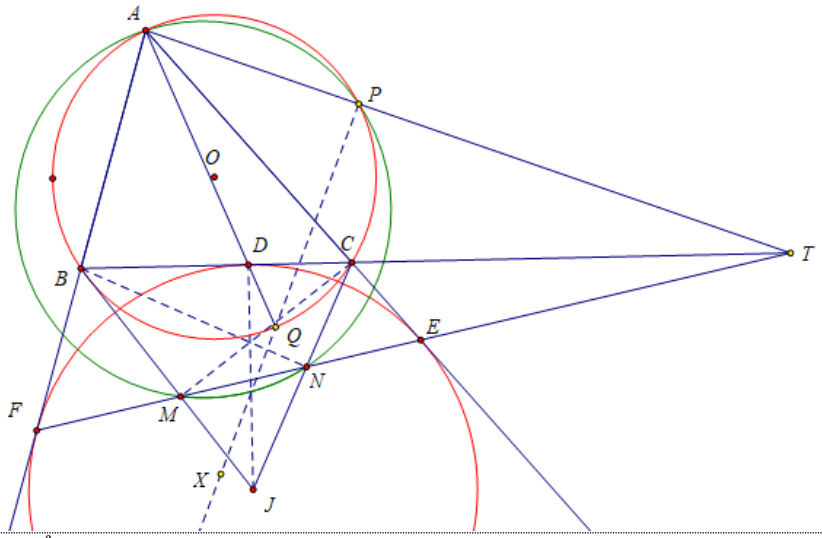
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI
CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2021 - 2022

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này gồm có 6 trang)

Câu	Nội dung yêu cầu	Điểm
Câu 1 (3,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+7x+2y\sqrt{2-y}=3\left(2x^2+1\right)+5\sqrt{2-y} \\ \sqrt{2x^2-4x+3}+x=\sqrt{y+3}+5 \end{cases}$.	
	Điều kiện: $-3\le y\le 2$. Phương trình (1) tương đương với $2x^3-6x^2+7x-3=(5-2y)\sqrt{2-y}$	0,25 0,25
	$\Leftrightarrow 2(x-1)^3+(x-1)=2(2-y)\sqrt{2-y}+\sqrt{2-y}$ (3)	0,5
	Xét hàm số $f(t)=2t^3+t$, $f(t)$ là hàm số đồng biến trên R (3) viết lại $f(x-1)=f\left(\sqrt{2-y}\right)\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2-y}$ $(\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2-y})$	0,25 0,25
	Thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{5-2y}+1+\sqrt{2-y}=\sqrt{y+3}+5$ $\Leftrightarrow \sqrt{5-2y}+\sqrt{2-y}-\sqrt{y+3}=4$	0,25 0,25
	Xét hàm số $g(y)=\sqrt{5-2y}+\sqrt{2-y}-\sqrt{y+3}$ trên $[-3;2]$. Khi đó $g'(y)=\dfrac{-1}{\sqrt{5-2y}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2-y}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+y}}<0\ \ \forall y\in(-3;2)$ và $g(y)$ liên tục trên $[-3;2]$ trên $g(y)$ nghịch biến trên $[-3;2]$.	0,25 0,25
	Lại có $g(-2)=4$ nên ta có $g(y)=g(-2)\Leftrightarrow y=-2$. Thay vào được $x=3$. Vậy nghiệm của hệ là $(3;-2)$.	0,25 0,25
Câu 2 (2,0đ)	Cho $a\neq 0$ và dãy số (x_n) định bởi $x_1=a$; $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{2(n+1)}{nx_n}$ với $n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.	
	Trường hợp 1: $a>0$. Nhận xét được $x_n>0,\forall n\ge 1$. Theo BĐT Cô si, $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{2(n+1)}{nx_n}\ge 2\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, suy ra $x_n\ge 2\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}>2,\forall n\ge 2$.	0,25 0,25
	Mặt khác, ta lại có: $x_{n+1}-x_n=\left(\dfrac{1}{2}x_n+\dfrac{2(n+1)}{nx_n}\right)-x_n=\dfrac{2(n+1)}{nx_n}-\dfrac{1}{2}x_n$ $=\dfrac{4(n+1)-nx_n^2}{2nx_n}\le\dfrac{4(n+1)-n.\dfrac{4n}{n-1}}{2nx_n}=\dfrac{-2}{n(n-1)x_n}<0$.	0,25 0,25
	Vậy (x_n) là dãy giảm, bị chặn dưới bởi 2 nên có giới hạn hữu hạn là $L\ge 2$.	0,25

	Trong phương trình xác định dãy cho n dần tới vô cùng ta được $$L=\frac{1}{2}L+\frac{2}{L}\Leftrightarrow L=2.$$ Do đó trường hợp này $\lim x_n=2.$	0,25
	Trường hợp 2: $a<0.$ Xét tương tự trường hợp trên hoặc đặt dãy $y_n=-x_n$ để đưa về trường hợp trên. Kết luận $\lim x_n=-2.$	0,25 0,25
Câu 3 (5,0đ)	Cho đường tròn (O) và dây BC cố định khác đường kính. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC của (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân. Đường tròn tâm J bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của EF với JB, JC. a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua trung điểm của BC. b) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN và (O). Gọi Q là giao điểm thứ hai của AD và (O). Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển trên cung lớn BC của (O).	
a (2,5đ)	 *(Học sinh không vẽ hình – không chấm)*	
	Ta có JB là phân giác ngoài của ABC nên $BJC=180^0-JBC-JCB$ $=180^0-\left(90^0-\frac{ABC}{2}\right)-\left(90^0-\frac{ACB}{2}\right)=90^0-\frac{BAC}{2}.$ (1)	0,25 0,25
	Lại có tam giác AEF cân ở A nên $AFE=90^0-\frac{BAC}{2}.$ (2)	0,25 0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $BJN=BFN$ nên tứ giác $BFJN$ nội tiếp. Do đó $BNJ=90^0$ hay $BN\perp CJ$.	0,25 0,25
	Tương tự ta cũng có $CM\perp BJ$.	0,5
	Từ đó suy ra đường tròn qua 3 điểm D,M,N là đường tròn Ole của tam giác BCJ Vậy đường tròn qua 3 điểm D,M,N đi qua trung điểm của BC.	0,25 0,25

b (2,5đ)		
	Gọi T là giao điểm của EF với BC. Vì BN, CM, JD đồng quy nên suy ra $(BCDT) = -1$.	0,25 0,25
	Tứ giác $BMNC$ nội tiếp suy ra hai trong ba đường tròn (O), $(BMNC)$, (AMN) có trục đẳng phương lần lượt là BC, MN, AP. Do đó BC, MN, AP đồng quy tại T hay AP cũng đi qua T.	0,25 0,25
	Phép chiếu xuyên tâm A từ đường thẳng BC lên (O) biến B,C,D,T lần lượt thành B,C,Q,P . Vì $(BCDT) = -1$ suy ra $(BCQP) = -1$ tức là tứ giác $BCQP$ điều hòa.	0,25 0,25 0,25
	Theo tính chất tứ giác điều hòa thì PQ, tiếp tuyến tại B, tiếp tuyến tại C của (O) đồng qui tại 1 điểm X. (*hoặc nêu PQ là đường đối trung của tam giác BPC*)	0,5
	Vì X là điểm cố định suy ra PQ luôn đi qua điểm cố định.	0,25
Câu 4 (2,0đ)	Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $3^{p-1}-1$ chia hết cho p và thương là một số chính phương.	
	Giả sử p là một số nguyên tố thỏa mãn điều kiện bài toán. (p ≠3, Đlí Phecma) Khi đó, tồn tại số tự nhiên A thỏa mãn: $\frac{3^{p-1}-1}{p} = A^2 \Leftrightarrow 3^{p-1}-1 = p.A^2$. Ta thấy $p=2$ thỏa mãn bài toán.	0,25 0,25
	Xét trường hợp $p>2$, khi đó p lẻ, đặt $p-1=2k$ với k là số nguyên dương, ta có $(3^k-1)(3^k+1) = p.A^2$ Vì $(3^k-1;3^k+1)=2$, ta suy ra tồn tại các số tự nhiên B,C sao cho $\left[\begin{array}{l} 3^k-1=2p.B^2; 3^k+1=2.C^2 \\ 3^k-1=2.B^2; 3^k+1=2p.C^2 \end{array}\right.$ Trường hợp 1: $3^k-1=2p.B^2$; $3^k+1=2.C^2$. Ta có $3^k+1=2.C^2 \Rightarrow 2.C^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3) \Rightarrow C^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, không thỏa mãn.	0,25 0,25
	Trường hợp 2: $3^k-1=2.B^2$; $3^k+1=2p.C^2$. Nếu k lẻ suy ra $4 \mid 3^k+1=2p.C^2$, do đó $2 \mid C$ (vì p lẻ) . Vậy $3^k+1=2p.C^2$ chia hết cho 8, vô lí vì $3^k+1 \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 8)$ (vì k lẻ). Với k chẵn, đặt $k=2m$ với m là số nguyên dương, ta có $2B^2 = 3^k-1 = (3^m+1)(3^m-1)$	0,25

	Vì $(3^m-1;3^m+1)=2$ ta suy ra tồn tại các số tự nhiên C,D sao cho $\left[\begin{array}{l}3^m-1=2.D^2;\ \ 3^m+1=E^2\\3^m-1=D^2;\ \ \ 3^m+1=2.E^2\end{array}\right.$	0,25
	Tương tự lập luận trên ta thấy $3^m+1=2.\mathrm{E}^2$ không xảy ra. Vậy $3^m+1=E^2$, nghĩa là $3^m=(E-1)(E+1)$ điều này dẫn đến tồn tại hai số tự nhiên $s>t$ sao cho $E-1=3^t$ và $E+1=3^s$. Do đó $2=(\mathrm{E}+1)-(\mathrm{E}-1)=3^t(3^{s-t}-1)$. Rõ ràng điều này chỉ xảy ra khi $3^t=1$ và $3^{s-t}-1=2$ hay $t=0;s=1$, từ đó ta tìm được $p=5$ (thỏa mãn). Vậy $p=2;\ p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25 0,25
Câu 5 (3,0đ)	Tìm tất cả các hàm số $f:\ R\to R$ thỏa mãn điều kiện $f(x)f(y)+f(xy-1)=2xy-1$ với mọi số thực x,y.	
	Giả sử tồn tại hàm số $f:R\to R$ thỏa mãn điều kiện $f(x)f(y)+f(xy-1)=2xy-1$ (1) với mọi x,y thuộc R. Ta thấy nếu $f(x)\equiv C$ thì không thỏa mãn.	0,25
	Trong (1) cho $y=0$ ta được $f(0)f(x)+f(-1)=-1$ với mọi x, suy ra $f(0)=0$ Trong (1) cho $x=y=1$ ta có $f^2(1)=1$ nên $f(1)=1$ hoặc $f(1)=-1$.	0,25 0,25
	<u>*Trường hợp 1:*</u> Với $f(1)=1$. Trong (1) cho $y=1$ ta được $f(x)+f(x-1)=2x-1$ (2) Trong (2) thay x bởi xy ta có $f(xy)+f(xy-1)=2xy-1$. Kết hợp với (1) ta được $f(xy)=f(x)f(y)$ với mọi x,y thuộc R. (3)	0,25 0,25
	Trong (1) cho $y=x$ ta được $f^2(x)+f(x^2-1)=2x^2-1$ $\Rightarrow f^2(x)+f(x-1).f(x+1)=2x^2-1$ (do (3)) (4) Trong (2) thay x bởi $x+1$ ta được $f(x+1)+f(x)=2x+1$ (5) Từ (2), (4) vào (5) ta có: $f^2(x)+\left[(2x-1)-f(x)\right].\left[(2x+1)-f(x)\right]=2x^2-1$ $\Rightarrow f^2(x)+4x^2-1-4xf(x)+f^2(x)=2x^2-1$ $\Rightarrow 2\left(f(x)-x\right)^2=0$ $\Rightarrow f(x)=x$. (Thử lại thỏa mãn.)	0,25 . 0,25 0,25
	<u>*Trường hợp 2:*</u> Với $f(1)=-1$. Trong (1) cho $y=1$ ta được $-f(x)+f(x-1)=2x-1$ (6) Trong (6) thay x bởi xy ta có $-f(xy)+f(xy-1)=2xy-1$. Kết hợp với (1) ta được $f(xy)=-f(x)f(y)$ với mọi x,y thuộc R. (7) Trong (1) cho $y=x$ ta được $f^2(x)+f(x^2-1)=2x^2-1$ $f^2(x)-f(x-1).f(x+1)=2x^2-1$ (8) Trong (6) thay x bởi $x+1$ ta được $-f(x+1)+f(x)=2x+1$ (9)	0,25 0,25

	Từ (6), (8) , (9) ta có $\Rightarrow f^2(x)-\left[(2x-1)+f(x)\right].\left[-(2x+1)+f(x)\right]=2x^2-1$ $\Rightarrow f^2(x)-\left[-(4x^2-1)-2f(x)+f^2(x)\right]=2x^2-1$ $\Rightarrow 2x^2+2f(x)=0$ $\Rightarrow f(x)=-x^2$. Thử lại thỏa mãn. (Vậy có hai hàm số thỏa mãn bài toán là $f(x)=x$ và $f(x)=-x^2$.)	0,25 0,25
Câu 6 (2,0đ)	Gọi *S* là tập hợp gồm 2021 số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số (a,b,c) thỏa mãn điều kiện a,b,c thuộc S và $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 9?	
	Ta viết $a=3q_1+r_1$, $b=3q_2+r_2$, $c=3q_3+r_3$ với $r_i\in\{0;1;-1\}$, $i=1,2,3$. Ta có $r_i^3\equiv r_i(\text{mod}\,3)$ nên $a^3=(3q_1+r_1)^3=9k_1+r_1^3\equiv r_1(\text{mod}\,3)$. Tương tự $b^3\equiv r_2(\text{mod}\,3), c^3\equiv r_3(\text{mod}\,3)$ với $k_i\in Z$, $i=1,2,3$.	0,25 025
	Do đó $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 9 $\Leftrightarrow$ $r_1+r_2+r_3$ chia hết cho 9 $\Leftrightarrow$ $r_1+r_2+r_3=0$. Ta có hai trường hợp xảy ra:	0,25
	Trường hợp 1: $r_1=r_2=r_3=0$ hay $a,b,c\vdots 3$. Do $a,b,c\in S$ nên mỗi số a,b,c có 673 cách chọn, suy ra trường hợp này có 673^3 bộ (a,b,c) thỏa mãn.	0,25 0,25
	Trường hợp 2: $\{r_1,r_2,r_3\}=\{0,1,-1\}$ hay trong ba số a,b,c có một số chia hết cho 3, một số chia 3 dư 1, một số chia cho 3 dư -1. Do $a,b,c\in S$ nên số chia hết cho 3 có 673 cách chọn; số chia 3 dư 1 có 674 cách chọn; số chia 3 dư -1 có 674 cách chọn và có thể hoán vị các số a,b,c nên trường hợp này có $3!673.674^2$ bộ (a,b,c) thỏa mãn. Vậy có tất cả $673^3+3!673.674^2$ bộ số (a,b,c) thỏa mãn bài toán.	0,25 0,25 0,25
Câu 7 (3,0đ)	Cho các số thực không âm *x*, *y*, *z* thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}$.	
	Tìm GTLN: Đặt $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$. Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ tại điểm $t=\dfrac{1}{3}$ là $y=\dfrac{27}{50}(-t+2)$. Ta chứng minh $f(t)\le\dfrac{27}{50}(-t+2)$ với $t\in[0;1]$. Thật vậy: $\dfrac{1}{1+t^2}\le\dfrac{27}{50}(-t+2)\Leftrightarrow(3t-1)^2(4-3t)\ge 0,\ \forall t\in[0;1]$.	0,25 0,25 0,25
	Từ đó suy ra $P=f(x)+f(y)+f(z)\le\dfrac{27}{50}(-x-y-z+6)\quad=\dfrac{27}{10}$.	0,25 0,25
	Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ nên $\max P=\dfrac{27}{10}$.	0,25

	Tìm GTNN: Xét BĐT phụ: với $a \ge b \ge 0$ thỏa mãn $a+b \le 1$, ta chứng minh BĐT $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2} \ge 1+\frac{1}{1+(a+b)^2}$ (1) Dấu đẳng thức khi và chỉ khi $b=0$. Thật vậy, BĐT $\Leftrightarrow ab[2-2ab-ab(a+b)^2] \ge 0$ (2) Do $1 \ge a+b \ge 2\sqrt{ab}$ nên $xy \le \frac{1}{4}$. Suy ra $VT(2) \ge ab(2-3ab) \ge 0 = VP(2)$.	0,25 0,25
	Áp dụng BĐT (1) ta có $P=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2} \ge 1+\frac{1}{1+(x+y)^2}+\frac{1}{1+z^2}$ $\ge 2+\frac{1}{1+(x+y+z)^2}=\frac{5}{2}$.	0,25 0,25
	Dấu đẳng thức khi và chỉ khi trong 3 số có 1 số bằng 1 và hai số bằng 0 Vậy $\min P=\frac{5}{2}$.	0,25 0,25

Chú ý: Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án- các thầy cô căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.

<u>Có thể chứng minh một số ý rõ hơn ở câu 3b như sau:</u>

Gọi *T* là giao điểm của *EF* với *BC*. Vì *BN, CM, JD* đồng quy nên suy ra (*BCDZ*)= -1.

Lại có tứ giác *BMNC* nội tiếp suy ra hai trong ba đường tròn (*O*), (*BMNC*), (*AMN*) có trục đẳng phương lần lượt là *BC, MN, AP*. Do đó *BC, MN, AP* đồng quy tại *T* hay *AP* cũng đi qua *T*.

Đặt $BC=a, CA=b, AB=c$. Do D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (J) với BC, CA, AB nên $CD=CE=\frac{a+c-b}{2}; BD=BF=\frac{a+b-c}{2}$. Từ đây, áp dụng định lý Ceva cho ΔABC ta suy ra được AD, BE, CF đồng quy nên $(BCDT)=-1$.

Xét phép chiếu tâm *A* từ đường thẳng *BC* lên (*O*), vì (*BCDT*) = -1 suy ra (*BCQP*)= -1 tức là tứ giác *BCQP* điều hòa.

Gọi *S* là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O) và $PS \cap (O) = Q'$.

Rõ ràng $\Delta SBQ'$ đồng dạng với ΔSPB nên $\frac{BQ'}{BP}=\frac{SQ'}{SP}$, tương tự thì $\frac{CQ'}{CP}=\frac{SQ'}{SP} \Rightarrow \frac{BQ'}{BP}=\frac{CQ'}{CP}$ suy ra $BCPQ'$ là tứ giác điều hòa nên $Q \equiv Q$ hay P, Q, S thẳng hàng.

Suy ra *PQ* luôn đi qua giao điểm *S* của hai tiếp tuyến tại *B, C* của (*O*) và điểm này cố định.