

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSGQG

BÌNH THUẬN 2023-2024

Phạm Minh Trí- Cựu học sinh chuyên toán THPT chuyên Trần Hưng Đạo

1. Đề bài

Bài 1: (5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố p để -1 là một số hạng của dãy số (u_n) được cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - pu_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 2: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a \geq b \geq c$ và $a + b + c = 3$.

Chứng minh:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + 3b \geq 5$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi nào?

Bài 3: (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) + f(x+y) = xy(xy+2)$$

Bài 4: (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có trực tâm là H và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tia NH cắt (O) tại M . Đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại I . Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và cắt (O) tại điểm thứ hai E . Biết đường tròn đường kính ID cắt (O) tại hai điểm F, K phân biệt. Chứng minh ba đường thẳng FK, ME, ON đồng quy.

2. Lời giải

Bài 1: (5 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố p để -1 là một số hạng của dãy số (u_n) được cho bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 0; u_2 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - pu_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải

Với $p = 2$, ta được u_n chẵn với mọi $n \geq 3$. Vậy $p = 2$ không thỏa ycbt.

Với $p = 5$, ta được $u_3 = 2; u_4 = -1$. Vậy $p = 5$ thỏa ycbt.

Với $p \neq 5$, giả sử tồn tại m sao cho $u_m = -1$. Khi đó, ta có:

$$-1 = u_m \equiv 2u_{m-1} \equiv 2^2u_{m-2} \equiv \dots \equiv 2^{m-2}u_2 = 2^{m-2} \pmod{p} \quad (1)$$

Ta chứng minh $u_k \equiv k - 1 \pmod{p-1}, k = 4, 5, 6, \dots$ (2)

Thật vậy, ta có:

$$u_4 = 2u_3 - pu_2 = 2(2u_2 - pu_1) - pu_2 = 2^2u_2 - pu_2 \equiv 2^2 - 1 \equiv 3 \pmod{p-1}$$

$$u_5 = 2u_4 - pu_3 = 2u_4 - p(2u_2 - pu_1) = 2u_4 - 2p \equiv 2 \cdot 3 - 2 \equiv 4 \pmod{p-1}$$

Vậy mệnh đề đúng với $k = 4, 5$

Giả sử mệnh đề đúng đến giá trị k bất kì. Khi đó ta có:

$$u_{k+1} = 2u_k - pu_{k-1} \equiv 2(k-1) - (k-2) \equiv k \pmod{p-1}$$

Vậy (2) đúng hay $-1 = u_m \equiv m - 1 \pmod{p-1} \Rightarrow m \equiv 0 \pmod{p-1}$ (3)

Do $(p; 2) = 1$ nên theo định lý Fermat nhỏ, ta có: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^m \equiv 1 \pmod{p}$ (do (3))

Từ đây kết hợp với (1), ta được:

$$\begin{aligned} -1 &= u_m \equiv 2^{m-2} u_2 \equiv 2^{m-2} \pmod{p} \\ \Rightarrow -4 &\equiv 2^m \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 5 \equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Vậy $p = 5$, vô lí.

Từ các trường hợp, ta được $p = 5$ là số duy nhất thỏa đề.

Bài 2: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $a \geq b \geq c$ và $a + b + c = 3$.

Chứng minh:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + 3b \geq 5$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi nào?

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + 3b &= \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + (a + b + c)b \geq \frac{a}{c} + ac + \frac{c}{b} + bc + b^2 \geq 2a + 2c + b^2 \\ &= 2(3 - b) + b^2 = b^2 - 2b + 6 \geq 5 \end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm. Dấu " $=$ " xảy ra tại $a = b = c = 1$

Bài 3: (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) + f(x+y) = xy(xy+2) \quad (1)$$

Giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa ycbt.

Kí hiệu $P(a; b)$ là phép thay x bởi a , y bởi b vào (1).

$$P(x; 0): \forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(0) + f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (không thỏa)} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$P(1; -1): \forall x \in \mathbb{R}, f(1)f(-1) - 1 = -1 \Leftrightarrow f(1)f(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

Nếu $f(1) = 0$. Ta có:

$$P(x; 1): \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = x^2 + 2x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 1$$

Thử lại ta thấy hàm số này thỏa ycbt.

Nếu $f(-1) = 0$. Ta có:

$$P(x; -1): \forall x \in \mathbb{R}, f(x-1) = x^2 - 2x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 1$$

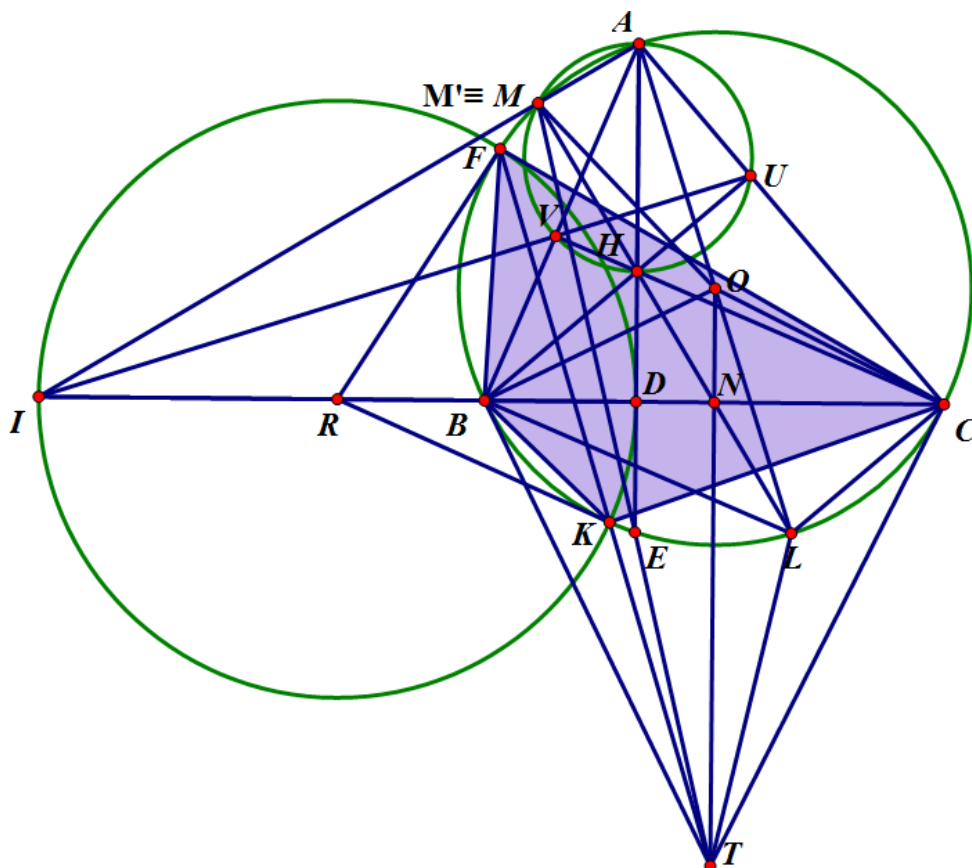
Thử lại ta thấy hàm số này thỏa ycbt.

Vậy $f(x) = x^2 - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất thỏa đề.

Bài 4: (5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có trục tâm là H và nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tia NH cắt (O) tại M . Đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại I . Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D và cắt (O) tại điểm thứ hai E . Biết đường tròn đường kính ID cắt (O) tại hai điểm F, K phân biệt.

Chứng minh ba đường thẳng FK, ME, ON đồng quy.

Giải



Xét thể hình như hình vẽ. Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Kẻ đường cao BU, CV của tam giác ABC . Gọi M' là giao điểm khác A của đường tròn $(AVHU)$ và đường tròn (O) . Kẻ đường kính AL của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) và ON đồng quy tại T .

Do tứ giác $BHCL$ là hình bình hành và N là trung điểm của BC nên N là trung điểm của $HL \Rightarrow H, M', L$ thẳng hàng (1)

Ta có: $AM' \perp M'L$; $AM' \perp M'H$ nên M', H, L thẳng hàng. (2)

Từ (1), (2) ta được M', H, N, L thẳng hàng hay $M \equiv M'$.

Nhận xét: $AM; EF; BC$ lần lượt là trục đẳng phương của ba cặp đường tròn $((O); (AVHU)); ((AVHU); (BCUV)); ((BCUV); (O))$ nên đồng quy tại I .

Trong tam giác ABC có $AD; BU; CV$ đồng quy tại H và UV cắt BC tại I , ta có:

$$(IDBC) = -1$$

Do đó, với R là trung điểm của ID , ta được:

$$RF^2 = RK^2 = RI \cdot RD = RB \cdot RC$$

Hay RF và RK là hai tiếp tuyến của (O) . Vậy tứ giác $BFCK$ là tứ giác điều hòa. Do đó, ta được FK , tiếp tuyến tại B, C của (O) đồng quy tại T .

Ta đi chứng minh M, E, T thẳng hàng.

Thật vậy, do $NM \cdot NL = NB \cdot NC = NC^2 = NO \cdot NT$ nên tứ giác $MOLT$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{LMT} = \widehat{LOT} = \widehat{LAE} = \widehat{LME}$$

Vậy M, E, T thẳng hàng hay ON, EM, KF đồng quy tại T (đpcm).