

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NĂM 2020
Môn thi: Toán (chuyên)
(Dành cho thí sinh thi vào trường THPT Chuyên Hạ Long)
Thời gian làm bài : 150 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}-1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) \cdot \left(3\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \right)$ với
 $x \geq 0, x \neq 1; x \neq 4; x \neq 9$

- a) Rút gọn A
- b) Tìm x để $A < 2$

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + m^2 - 2m + 2 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 24$
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} = y^2 + y - x \\ \sqrt{y-1} = \sqrt{x+3y+1} - 4 \end{cases}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 4xy + 3x + 4y = 27$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $M = x + 2y$

Câu 4. (3,5 điểm)

Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B, C là các tiếp điểm, $AD < AE, \widehat{DB} < \widehat{DC}$). Qua điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với DE tạo H , đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại K . Chứng minh:

- a) Tứ giác $BCOH$ nội tiếp
- b) KD là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- c) $\widehat{DBC} = \widehat{HBE}$

Câu 5. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho $\frac{ab(a+b)}{ab+2}$ là số nguyên

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) A = \frac{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3) - (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{3x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

$$b) A < 2 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} < 0$$

Vì $\sqrt{x}+4 > 0$ với mọi x nên $\sqrt{x}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

Vậy $0 \leq x < 1$ thì $A < 2$

Câu 2.

1. Đặt $x^2 = t$. Phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m^2 - 2m + 2 = 0(*)$

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân

$$\text{biệt } t_1, t_2 \text{ dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m - 2 > 0 \\ t_1 + t_2 = 2m > 0 \\ t_1 t_2 = m^2 - 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 24 \Leftrightarrow 2(t_1^2 + t_2^2) = 24$$

$$\Leftrightarrow (t_1 + t_2) - 2t_1 t_2 = 12 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4(ktm) \\ m = 2(tm) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$

2. Điều kiện: $y \geq 1; x + y \geq 0; x + 3y \geq -1$

$$2\sqrt{x+y} = y^2 + y - x \Leftrightarrow (\sqrt{x+y} + 1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = y \\ \sqrt{x+y} = -y-2 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+y} = -y-2 \text{ (loại do } y \geq 1)$$

$$\sqrt{x+y} = y \Leftrightarrow x = y^2 - y \text{ (tmdk) thay vào phương trình :}$$

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{x+3y+1} - 4 \text{ được } \sqrt{y-1} = y-3 \text{ (dk : } y \geq 3)$$

$$\text{Biến đổi phương trình thành } y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2(ktm) \\ y_2 = 5(tm) \Rightarrow x = 20 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x = 20; y = 5$

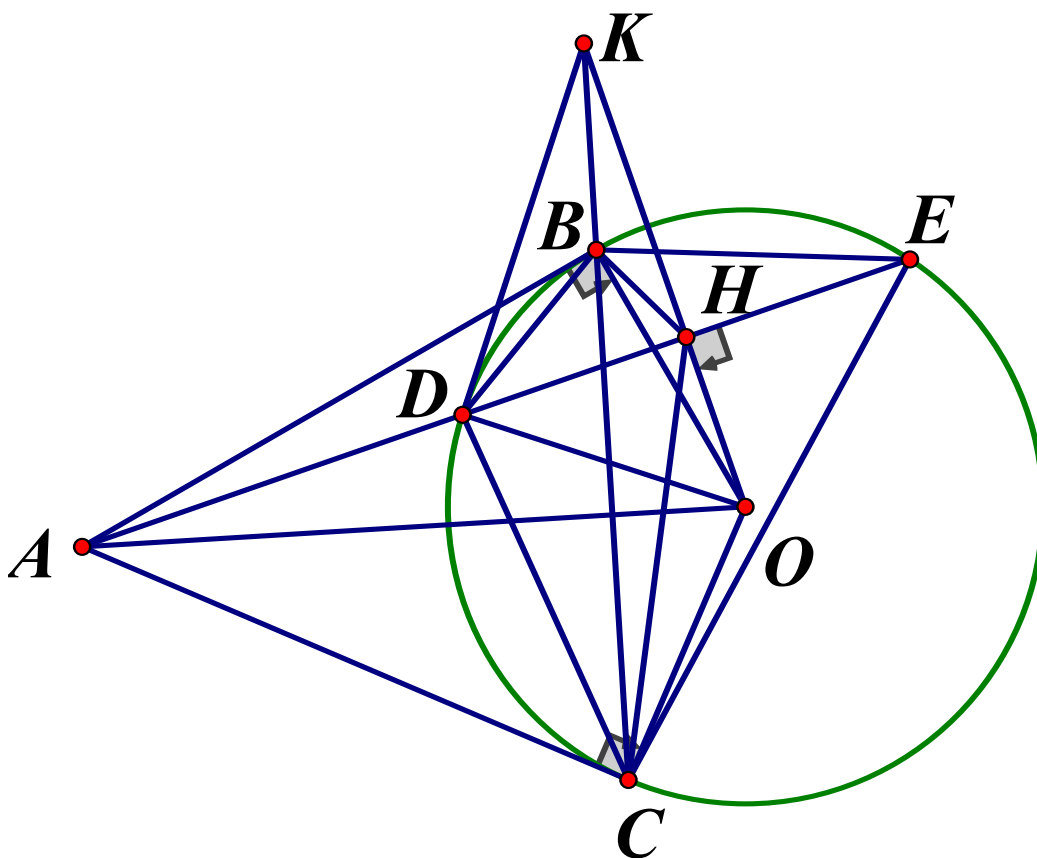
Câu 3.

$$x^2 + 5y^2 + 4xy + 3x + 4y = 27 \Leftrightarrow (x+2y)^2 + 3(x+2y) + (y-1)^2 = 28$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{121}{4} - (y-1)^2$$

$$\text{Vậy } \left(x+2y+\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{121}{4} \Leftrightarrow \left|x+2y+\frac{3}{2}\right| \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow -7 \leq x+2y \leq 4$$

$$\text{Vậy } M \text{ lớn nhất là } 4 \text{ khi } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}, M \text{ nhỏ nhất là } -7 \text{ khi } \begin{cases} x=-9 \\ y=1 \end{cases}$$

Câu 4.

- a) Ta có $\angle ABO = \angle AHO = \angle ACO = 90^\circ \Rightarrow 5$ điểm A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính $AO \Rightarrow$ tứ giác $BCOH$ nội tiếp
- b) Tứ giác $BCOH$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CHO = \angle CBO$. $\triangle OBC$ cân $\Rightarrow \angle CBO = \angle BCO$
 $\Rightarrow \angle OHC = \angle OCK$

$\triangle OHC$ và $\triangle OCK$ có $\widehat{OHC} = \widehat{OCK}$, $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow \triangle OHC \sim \triangle OCK$

$$\Rightarrow \frac{OH}{OC} = \frac{OC}{OK} \Rightarrow OH \cdot OK = OC^2 \text{ mà } OC = OD \Rightarrow OH \cdot OK = OD^2 \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OK}$$

$\triangle OHD$ và $\triangle ODK$ có $\frac{OH}{OD} = \frac{OD}{OK}$, $\widehat{O}$ chung $\Rightarrow \triangle OHD \sim \triangle ODK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ODK} = \widehat{OHD} = 90^\circ \Rightarrow KD$ là tiếp tuyến của (O)

c) Tứ giác $BCOH$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBK} = \widehat{HOC}$, $\widehat{BHK} = \widehat{BCO}$, theo ý b ta có:

$$\widehat{BCO} = \widehat{OHC} \Rightarrow \widehat{BHK} = \widehat{OHC}$$

$\triangle OHC$ và $\triangle BHK$ có: $\widehat{HBK} = \widehat{HOC}$; $\widehat{BHK} = \widehat{OHC} \Rightarrow \triangle BHK \sim \triangle OHC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HO}{HB} = \frac{HC}{HK} \Rightarrow HB \cdot HC = HO \cdot HK$$

$\triangle ODK$ vuông tại D, đường cao $DH \Rightarrow HO \cdot HK = HD^2$

$$\text{Lại có } OH \perp DE \Rightarrow HD = HE \Rightarrow HB \cdot HC = HE^2 \Rightarrow \frac{HE}{HC} = \frac{HB}{HE}$$

$$\widehat{BHK} = \widehat{OHC}, \widehat{KHE} = \widehat{OHE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{CHE}$$

$\triangle BHE$ và $\triangle EHC$ có $\frac{HE}{HC} = \frac{HB}{HE}$ và $\widehat{BHE} = \widehat{CHE} \Rightarrow \triangle BHE \sim \triangle EHC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{HEC}$

Lại có: $\widehat{DEC} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn $\widehat{DC}$)

$$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{HBE}$$

Câu 5.

$$\frac{ab(a+b)}{ab+2} = (a+b) - \frac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Q}$$

$$a \geq 1, b \geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq ab+1 < ab+2 \Rightarrow \frac{2(a+b)}{ab+2} < 2$$

$$\frac{2(a+b)}{ab+2} > 0, \text{ kết hợp với } \frac{2(a+b)}{ab+2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{2(a+b)}{ab+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2a+2b = ab+2 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 2$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } a, b \text{ nguyên} \Rightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ b-2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a-2=2 \\ b-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

Vậy các cặp số cần tìm là $(3;4)$ và $(4;3)$