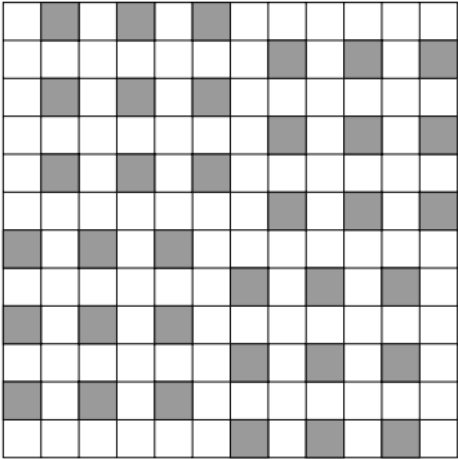
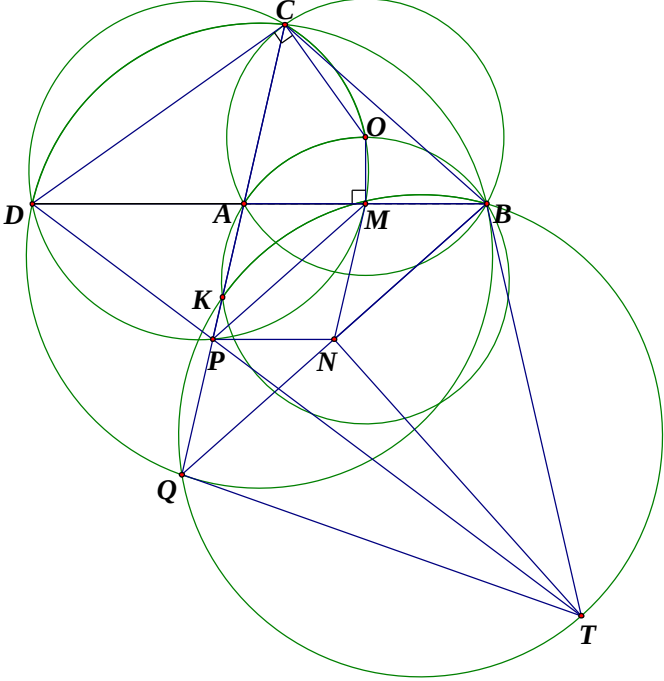


CÂU	ĐÁP ÁN	Điểm
Câu 1	Cho dãy số (a_n) xác định như sau: $a_1 = 4$ và với mọi $n \geq 1$ thì $a_{n+1} = \frac{a_n^2 - a_n + 9}{5}$. Đặt $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + 2}$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn và xác định giới hạn đó.	$\Sigma=4$
	Từ định nghĩa, ta có $a_{n+1} - 3 = \frac{a_n^2 - a_n - 6}{5} = \frac{(a_n - 3)(a_n + 2)}{5}$ Từ đây, ta dễ dàng chỉ ra bằng quy nạp rằng $a_n > 3$ với mọi n.	1
	Hơn nữa, $\frac{1}{a_{n+1} - 3} = \frac{5}{(a_n - 3)(a_n + 2)} = \frac{1}{a_n - 3} - \frac{1}{a_n + 2}$ Từ đây, vẫn bằng quy nạp, ta dễ thấy $1/(a_n - 3)$ tăng ngặt, dẫn đến (a_n) tăng ngặt.	1
	Nếu (a_n) có giới hạn hữu hạn u (nói riêng $u > a_1 = 4$) thì bằng cách chuyển (*) qua giới hạn ta sẽ có $\frac{1}{u+2} = 0$, mâu thuẫn. Vậy, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.	1
	Ngoài ra, cũng từ (*), ta có $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - 3} = \frac{1}{a_1 - 3} - \frac{1}{a_{n+1} - 3} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 3}$ Từ đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$.	1
Câu 2	Cho các số thực a, b và c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ và $a^4 + b^4 + c^4 = 128$. Hỏi biểu thức $ab + bc + ca$ có thể nhận những giá trị nào?	$\Sigma=4$
	Ta sẽ chỉ ra rằng $ab + bc + ca = -8$. Xét đa thức $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 + pt^2 + qt + r$. Khi đó, ta có $p = -(a+b+c) = 0, q = ab + bc + ca$, và $0 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 2q$ dẫn đến $a^2 + b^2 + c^2 = -2q$ và do đó $q \leq 0$.	2
	Vậy, $f(t) = t^3 + qt + r$ và $tf(t) = t^4 + qt^2 + rt$. Rõ ràng rằng $tf(t) = 0$ với mọi $t \in \{a, b, c\}$. Cộng ba đẳng thức này lại, ta được $(a^4 + b^4 + c^4) + q(a^2 + b^2 + c^2) + r(a + b + c) = 0$ dẫn đến $0 = 128 - 2q^2$ và do đó $q = -8$ (do $q < 0$). Thực tế là giá trị này đạt được, chẳng hạn, khi $a = b = \frac{\sqrt{8}}{3}, c = -2\frac{\sqrt{8}}{3}$.	2
Câu 3	Ký hiệu $\mathcal{F}_n$ là tập hợp tất cả các đa thức một biến, bậc n mà các hệ số là hoán vị của tập hợp các số $\{2^0, 2^1, \dots, 2^n\}$. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (k, d) sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn: với mọi $f(x) \in \mathcal{F}_n$ thì $f(k)$ chia hết cho d	$\Sigma=4$
	Các cặp số cần tìm là (k, d) với d lẻ và $d \mid k-1$. Giả sử (d, k) là một cặp số thỏa mãn. Do $f(k)$ luôn là số lẻ nên hiển nhiên d lẻ.	1
	Xét $f_1(x) = 2^n x^n + 2^{n-1} x^{n-1} + \dots + 2^1 x + 2^0$ và $f_2(x) = 2^n x^n + 2^{n-1} x^{n-1} + \dots + 2^0 x + 2^1$ Khi đó $f_1(k) - f_2(k) = k - 1$. Do $f_1(k), f_2(k)$ chia hết cho d, ta có $k - 1$ chia hết cho d.	1

	Đảo lại, giả sử d là một số lẻ và $d \mid k-1$. Chọn n sao cho $d \mid 2^{n+1}-1$ (do d là số lẻ nên ta luôn chọn được n như vậy, chẳng hạn $n = \phi(d)-1$).	1
	Xét $f \in \mathcal{F}_n$. Do các hệ số của f là một hoán vị của $\{2^n, \dots, 2^0\}$ nên $f(1) = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^0 = 2^{n+1} - 1$ Nói riêng $f(1)$ chia hết cho d . Mà $k-1 \mid f(k) - f(1)$ (nếu $k \neq 1$) nên $d \mid f(k) - f(1)$, vì thế $d \mid f(k)$.	1
Câu 4	Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho có thể tô đen một số ô vuông con của một bảng $n \times n$ sao cho trong mỗi hàng và mỗi cột có đúng 3 ô màu đen, và không có hai ô màu đen nào có đỉnh chung.	$\Sigma=4$
	Giả sử một bảng kích thước $n \times n$ có một cách tô thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Nhận xét rằng mỗi hình 2×2 có không quá một ô đen. Hãy xét hai hàng liên tiếp, chúng tạo thành một dải $2 \times n$.	1
	Theo giả thiết, dải này chứa đúng 6 ô màu đen. Chia dải này thành các hình vuông 2×2 , bắt đầu từ bên trái. Do dải này chứa 6 ô đen và mỗi hình 2×2 chỉ có nhiều nhất 1 ô đen nên $n \geq 2 \cdot 5 + 1 = 11$ (vì ô đen cuối cùng có thể nằm trong hình chữ nhật 1×2).	1
	Giả sử rằng $n=11$. Vẫn theo lập luận trên đây, ta thấy rằng trong 10 cột đầu tiên của mỗi dải 2×11 có 5 ô đen, do đó dải 2×1 cuối cùng phải có 1 ô đen. Nói cách khác, hai ô liên tiếp của cột cuối cùng của bảng phải có 1 ô đen. Suy ra trên cột cuối cùng có ít nhất 5 ô đen, mâu thuẫn.	1
	Với $n=12$, ta có thể tô như hình vẽ sau: 	1
Câu 5	Cho tam giác nhọn ABC có $BC > AC$ và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại D . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD , OCD và AOB cắt lại tia CA (ở bên ngoài cạnh CA) tương ứng tại các điểm Q , P và K sao cho P nằm giữa A và K , và K nằm giữa P và Q . Đường thẳng DP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BKQ tại T sao cho P và T nằm ở hai phía đối với đường thẳng BQ . Chứng minh rằng $TB = TQ$.	$\Sigma=4$
	Do CD là tiếp tuyến của (O) , ta có $\angle OCD = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó, hiển nhiên $\angle OMA = 90^\circ$. Suy ra ngũ giác $PMOCD$ nội tiếp đường tròn đường kính OD .	1

		
	Do đó, ta có $\angle PMA = \angle PMA = \angle PCD = \angle QBA$ (đẳng thức cuối đến từ việc BCDQ đồng viên). Từ đó suy ra PM song song QB và do đó P là trung điểm của AQ, hay $AP = PQ$	1
	Gọi T_1 là trung điểm của cung BQ không chứa K trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BKQ. Khi đó $T_1B = T_1Q$. Do $\angle DPO = 90^\circ$, ta chỉ cần chỉ ra rằng $\angle OPT_1 = 90^\circ$ (thật vậy, khi đó T_1 trùng với T và vì thế $TB = TQ$).	1
	Gọi N là trung điểm của BQ. Thế thì $\angle OMB = \angle T_1NB = 90^\circ$. Tứ giác QKBT₁ nội tiếp, do đó $\angle BT_1Q = 180^\circ - \angle BKQ = \angle AKB$. Chứng tỏ $\angle MBO = \frac{1}{2} \angle AKB = \frac{1}{2} \angle BT_1Q = \angle BT_1N$ và do đó $\triangle OMB \sim \triangle BNT_1$. Các tứ giác PMBN và AMNP là các hình bình hành, vì MN và PN là các đường trung bình của tam giác AQB. Từ đó suy ra $\frac{OM}{MP} = \frac{BN}{PN} = \frac{MB}{T_1N} = \frac{PN}{T_1N}$ Điều này, kết hợp với việc các đẳng thức $\angle PMB = \angle BNP$ và $\angle OMB = \angle T_1NB$ dẫn đến $\angle OMP = \angle PNT_1$, cho thấy $\triangle OMP \sim \triangle PNT_1$. Từ đó suy ra $\angle MPO = \angle NT_1P$ và $\angle POM = \angle T_1PN$. Do vậy, $\angle OPT_1 = \angle MPN + \angle MPO + \angle NPT_1 = \angle PMA + \angle MPO + \angle MOP = 90^\circ$	2

Ghi chú: Nếu học sinh làm theo cách khác mà đúng thì vẫn chấm điểm tối đa.