

Câu 1. (1, 5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$$

Câu 2. (2, 5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \\ \sqrt{2x^3 - x} + 8y^2 + 3y = 4 \end{cases}$$

Câu 3. (2, 5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} + \frac{x+y}{4}$$

Câu 4. (2, 5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi I là điểm chính giữa cung AB . Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B): J là giao điểm của AN với BM .

a) Chứng minh $\triangle MBC$ và $\triangle NAC$ là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN .

c) Gọi K là trung điểm của IJ , tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}$.

Câu 5. (1, 0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN HÀ TĨNH

Câu 1. (1, 5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}$$

Lời giải

Ta biết rằng nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

do đó: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) &= (a-b)c^2 - (a^2 - b^2)c + ab(a-b) \\ &= (a-b)[c^2 - (a+b)c + ab] = (a-b)(c-a)(c-b) \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

Đặt $x = a-b, y = b-c, z = c-a$ khi đó ta có:

$$A = -\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = -3$$

Vậy $A = -3$.

Câu 2. (2, 5 điểm)

a) Giải phương trình: $9x^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \\ \sqrt{2x^3 - x} + 8y^2 + 3y = 4 \end{cases}$$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương:

$$9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 = (x^2 + x - 5)(\sqrt{3x+1} - 1)^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2(\sqrt{3x+1} + 1)^2 = (x^2 + x - 5) \cdot 9x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + x - 5 = (\sqrt{3x+1} + 1)^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 14 = 4\sqrt{3x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 15 + \sqrt{3x+1}(\sqrt{3x+1} - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(2x+3) + \frac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0 \end{cases}$$

Do $x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x+3 + \frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4} = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0, x=5$.

b) Điều kiện: $2x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$x^3 + xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + y^3) + (xy^2 + y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) + y^2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + 2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Với $x = -y$, thay vào phương trình thứ hai ta được: $\sqrt{2x^3 - x} + 8x^2 - 3x - 4 = 0$.

Nếu $\sqrt{2x^3 - x} + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x^3 - x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x(2x+1)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{matrix}$

Với $x=0$, ta thấy phương trình vô nghiệm và phương trình nhận một nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

Do đó xét $x \neq -\frac{1}{2}$, phương trình tương đương:

$$\sqrt{2x^3 - x - x + 8x^2 - 4x - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(2x+1)(x-1)}{\sqrt{2x^3 - x + x}} + 4(2x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1) \left(\frac{x}{\sqrt{2x^3 - x + x}} + 4 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2x^3 - x + x}} + 4 = 0$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{2x^3 - x + x}} + 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^3 - x} = -5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x > 0 \\ 32x^3 - 16x = 25x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x(32x^2 - 16x - 25) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 32x^2 - 16x - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}$$

Do đó trong trường hợp này hệ có ba nghiệm:

$$(x; y) = (1; -1), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}; -\frac{25 + 9\sqrt{33}}{64}\right).$$

$$\text{Với } x^2 - xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0. (\text{loại})$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có ba nghiệm: } (x; y) = (1; -1), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{25 - 9\sqrt{33}}{64}; -\frac{25 + 9\sqrt{33}}{64}\right).$$

Câu 3. (2, 5 điểm)

a) Tìm các số nguyên m, n thỏa mãn $m(m+1)(m+2) = n^2$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{9 - y^2} + \frac{x + y}{4}$$

Lời giải

a) Do $n^2 \geq 0$ nên suy ra $m(m+1)(m+2) \geq 0$, suy ra $m \geq -2$. Ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1. Xét $m = 0$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = -2$, khi đó tồn tại $n = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2. Xét m không thuộc tập hợp $\{-2; -1; 0\}$. Khi đó $m(m+1)(m+2) = n^2 > 0$. Ta có các khả năng sau:

+ Nếu m là số lẻ thì $(m; m+1) = (m+1; m+2); (m; m+2) = 1$. Do đó để tích là số chính phương thì $m, m+1, m+2$ là ba số chính phương. Nhưng $m, m+1$ là hai số nguyên liên tiếp nên không thể cùng là số chính phương.

+ Nếu m là số chẵn thì $(m; m+2) = 2; (m; m+1) = (m+1; m+2) = 1$. Do đó để tích trên là số chính phương thì $m+2 = 2a^2; m+1 = b^2; m = 2c^2$ với a, b, c là các số nguyên dương và

$$(a; c) = 1. \text{ Suy ra } 2(a^2 - c^2) = 2 \Leftrightarrow (a - c)(a + c) = 1 \Leftrightarrow a + c = a - c = 1 \Leftrightarrow a = 1; c = 0$$

Không thỏa mãn do a, b, c nguyên dương

Các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(m; n) = (-2; 0), (-1; 0), (0; 0)$

b) Đặt

$$a = x + y > 0 \Rightarrow xy = 3 - a$$

$$a^2 = (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow 4(x + y) + 4xy = 12$$

$$\Rightarrow 4a + a^2 \geq 12 \Leftrightarrow (a - 2)(a + 6) \geq 0 \Rightarrow a \geq 2$$

Theo bất đẳng thức AM-GM

$$\sqrt{9 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2}\sqrt{9 - x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{8 + (9 - x^2)}{2}$$

$$\sqrt{9 - x^2} \leq \frac{17}{4\sqrt{2}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{9 - y^2} \leq \frac{17}{4\sqrt{2}} - \frac{y^2}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow p \leq \frac{17}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} [(x + y)^2 - 2xy] + \frac{x + y}{4}$$

$$\rightarrow p \leq -\frac{1}{4\sqrt{2}} a^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} (3 - a) + \frac{a}{4} + \frac{17}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow p \leq -\frac{1}{4\sqrt{2}} a^2 - \frac{(\sqrt{2} - 1)}{4} a + 5\sqrt{2} \Rightarrow P \leq -\frac{1}{4\sqrt{2}} 2^2 - \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \cdot 2 + 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow P \leq 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = 2 \text{ hay } x = y = 1$$

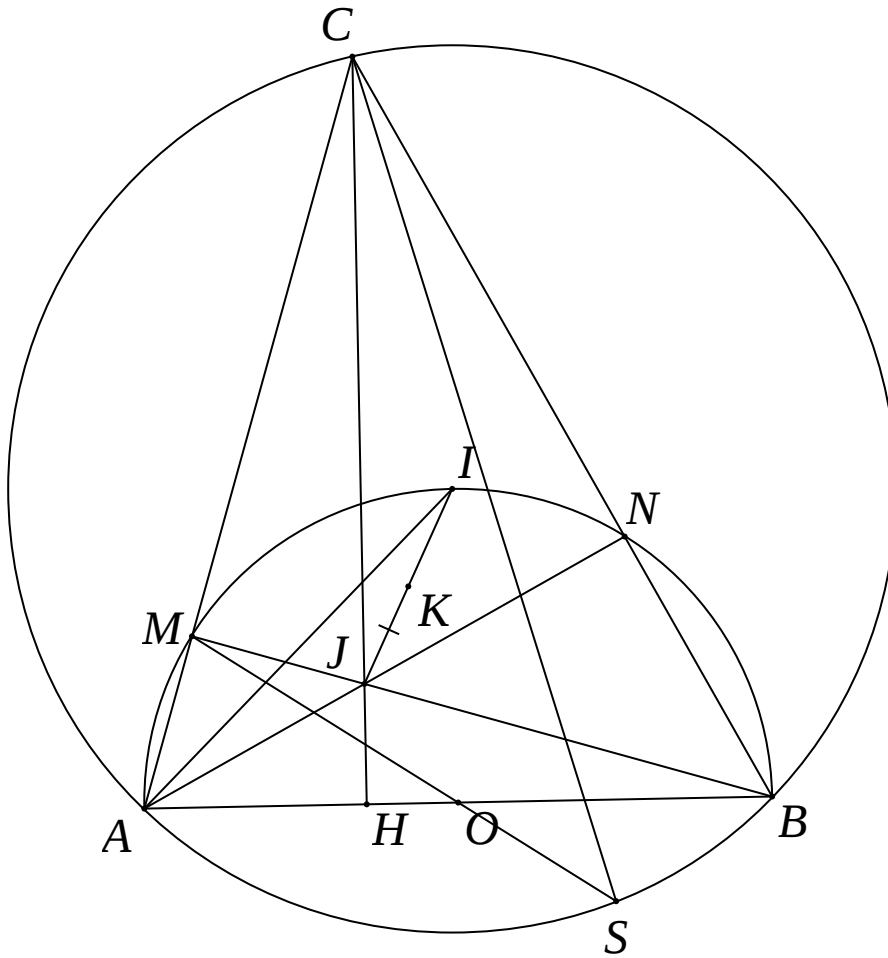
Câu 4. (2, 5 điểm).

Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi I là điểm chính giữa cung AB . Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM .

a) Chứng minh $\triangle MBC$ và $\triangle NAC$ là các tam giác cân.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN .

c) Gọi K là trung điểm của IJ , tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}$.



Lời giải

a) Vì I là điểm chính giữa cung AB nên tam giác IAB vuông cân tại I .

Khi đó: $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AIB} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$, hay $\widehat{ACN} = 45^\circ$

Mặt khác $\widehat{ANC} = 180^\circ - \widehat{ANB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\triangle NAC$ vuông tại N có $\widehat{ACN} = 45^\circ$ nên $\triangle NAC$ vuông cân tại N .

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\widehat{BCM} = 45^\circ$ và $\triangle MBC$ vuông tại M nên $\triangle MBC$ vuông cân tại M .

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có: $\widehat{INC} = \widehat{IAB} = 45^\circ$ do cùng phụ với $\widehat{INB}$.

Mà $\widehat{INA} = \widehat{IBA} = 45^\circ$ do đó $\widehat{INC} = \widehat{INA} = 45^\circ$ hay NI là phân giác của tam giác vuông cân NAC . Do đó $NI \perp AC$ hay $NI \perp MC$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $MI \perp NC$.

Do đó I là trực tâm của tam giác CMN .

c) Do $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ nên dễ dàng suy ra J là trực tâm tam giác CAB .

Khi đó ta có $MI \parallel JN$ do cùng vuông góc với BC và $MJ \parallel IN$ do cùng vuông góc với AC .

Tứ giác MINJ là hình bình hành, suy ra K cũng là trung điểm của MN , dẫn đến $OK \perp MN$. Gọi S là điểm đối xứng của C qua I , khi đó ΔCAB nội tiếp đường tròn đường kính CS có J là trực tâm của ΔCAB nên theo bổ đề quen thuộc thì tứ giác $AJBS$ là hình bình hành, suy ra O, J, S thẳng hàng.

Từ đó OI là đường trung bình của $\Delta CSI \Rightarrow CJ = 2OI = AB$. Mặt khác ΔCMN đồng dạng với

$$\Delta CBA \text{ nên: } \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CA} = \cos 45^\circ \Rightarrow MN = \frac{AB\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } OM^2 + ON^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{2} = MN^2 \text{ nên } \Delta OMN \text{ vuông cân tại}$$

$$O \Rightarrow OK = \frac{MN}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Do đó } \frac{CJ}{OK} = \frac{AB}{\frac{AB\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{CJ}{OK} = 2\sqrt{2} \text{ chung.}$$

Câu 5. (1, 0 điểm)

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, chia tập hợp X thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$.

Lời giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử không tồn tại tại 3 số a, b, c trong hai tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$. Đặt hai tập hợp đó lần lượt là A và B .

Vì trong mỗi tập hợp không tồn tại ba số a, b, c thỏa mãn $a + c = 2b$ nên bộ số $(1; 5; 9)$ đều không thể cùng thuộc A hoặc B .

Không mất tính tổng quát giả sử $1 \in A$.

Ta xét hai trường hợp:

TH1: $9 \in A$. Suy ra $5 \in B$.

Nếu $7 \in A \Rightarrow 4 \in B$ và $8 \in B \Rightarrow 3 \in A \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 6 \in A$, mâu thuẫn do $(2; 5; 8)$ đều thuộc B .

Nếu $7 \in B \Rightarrow 6 \in A$. Ta xét tiếp hai trường hợp:

$+ 3 \in A \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 4 \in B$, mâu thuẫn do $(3; 6; 9)$ đều thuộc A .

$+ 3 \in B$, mâu thuẫn do $(3; 5; 7)$ đều thuộc B .

TH2: $9 \in B$. Suy ra $5 \in A \Rightarrow 3 \in B \Rightarrow 6 \in A \Rightarrow 4 \in B \Rightarrow 7 \in B \Rightarrow 2 \in A$ và $8 \in A$ mâu thuẫn do $(2; 5; 8)$ đều thuộc B .

Vậy trong mọi trường hợp đều tồn tại bộ ba số a, b, c trong một tập hợp thỏa mãn $a + c = 2b$.