

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM**

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH 10 THPT CHUYÊN

Năm học 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN (Toán chuyên Tin)

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Khóa thi ngày 23-25/07/2020

Câu 1.(1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ với $x > 0$

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các giá trị x thỏa mãn $P^2 = P$

Câu 2.(1,0 điểm)

Cho n là số tự nhiên có dạng $n = 1 + 4k, k \in \mathbb{Z}$. Đặt $x = 2^{n+1} + 2$ và $y = 2n + 1$. Chứng minh rằng $(n.y^2 - 1)$ chia hết cho 4 và $(x^n + y^n)$ là một số chính phương

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + m$ (m là tham số). Biết (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm A và B , trong đó $A(-1;1)$. Tìm tọa độ điểm B

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả giá trị của m để phương trình đã cho có một nghiệm bằng $x = 1$ và một nghiệm lớn hơn 2

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x+y-1)x = -4 \\ (2x+3y)(x+y-1) = 10 \end{cases}$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB > BC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC, H là chân đường cao kẻ từ đỉnh B của tam giác ABC và K là điểm đối xứng của H qua đường thẳng DE .

a) Chứng minh bốn điểm A, D, O, E cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh AK vuông góc với BK và ba điểm B, O, K thẳng hàng

c) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt AC tại M . Trên tia BM , lấy điểm P sao cho $BP = CM$, trên tia đối của tia BA lấy điểm N sao cho $BN = BC$. Gọi X, Y lần lượt là

trung điểm của CN và BM . Tính tỉ số $\frac{XY}{CP}$

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2020$

Chứng minh rằng
$$\frac{4a}{2020a+b^2} + \frac{4b}{2020b+c^2} + \frac{4c}{2020c+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$P = \frac{\sqrt{x}(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} (x>0) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= x - \sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 = x - 1$$

Đề $P^2 = P$ khi và chỉ khi:

$$(x-1)^2 = x-1 \Leftrightarrow (x-1)(x-1-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ x=2(tm) \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 2\}$ thì $P^2 = P$

Câu 2.

$$n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}; x = 2^{n+1} + 2; y = 2^n + 1$$

*Ta có:

$$n.y^2 - 1 = (4k+1)(2^n+1)^2 - 1$$

$$= 4k(2^n+1)^2 + (2^n+1)^2 - 1 = 4k(2^n+1)^2 + 4^n + 2.2^n$$

$$\text{Vì } \begin{cases} 4k(2^n+1)^2 : 4 \\ 4^n : 4 \\ 2.2^n = 2.2^{4k+1} = 4.2^{4k} : 4 \end{cases} \quad \text{nên } n.y^2 - 1 : 4$$

$$*x^n + y^n = (2^{n+1} + 2)^n + (2^n + 1)^n = [2(2^n + 1)]^n + (2^n + 1)^n$$

$$= 2^n (2^n + 1)^n + (2^n + 1)^n = (2^n + 1)(2^n + 1)^n$$

$$= (2^n + 1)^{n+1} = (2^n + 1)^{4k+2} = [(2^n + 1)^{2k+1}]^2$$

Vì $(2^n + 1)^{2k+1} \in \mathbb{Z}$ nên $x^n + y^n$ là số chính phương

Câu 3.

Ta có: $A(-1;1) \in (d): y = x + m \Leftrightarrow 1 = -1 + m \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow (d): y = x + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Vậy $B(2;4)$

Câu 4.

a) $x^2 - 2(2m+1)x + m^2 + 3m + 1 = 0$. Phương trình có một nghiệm bằng 1 nên

$$1^2 - 2(2m+1).1 + m^2 + 3m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow x = 1(ktm) \\ m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} (tm) \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

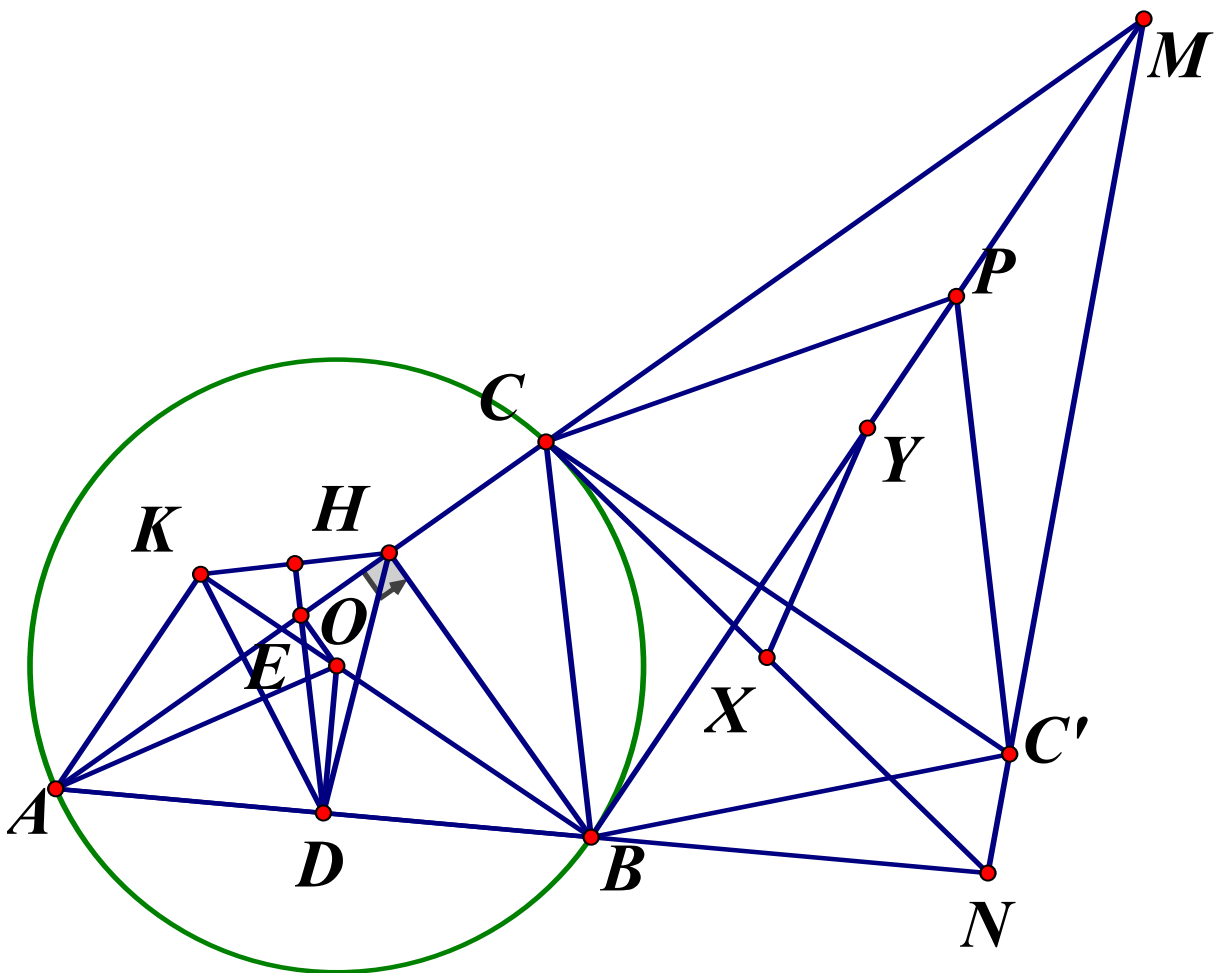
$$b) \begin{cases} (x+y-1)x = -4 \\ (2x+3y)(x+y-1) = 10 \end{cases} (x+y-1 \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x(x+y-1) = -40 \\ (8x+12y)(x+y-1) = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)x = -4 \\ (18x+12y)(x+y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)x = -4 \\ 18x+12y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ \left(x - \frac{3}{2}x - 1\right)x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \\ y = -\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -3 \\ x = -4; y = 6 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y) \in \{(2; -3); (-4; 6)\}$

Câu 5.



a) *Ta có E là trung điểm của $AC \Rightarrow OE \perp AC \Rightarrow \angle AEO = 90^\circ$

D là trung điểm của $AB \Rightarrow OD \perp AB \Rightarrow \angle ADO = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AEO + \angle ADO = 180^\circ \Rightarrow AEOD$ là tứ giác nội tiếp

Vậy A, E, O, D cùng thuộc một đường tròn (đpcm)

b) Ta có K và H đối xứng qua ED nên ED là đường trung trực của HK

Mà $D \in ED \Rightarrow DH = DK$

Trong $\triangle AHB$ vuông tại K có $HD = \frac{1}{2}AB \Rightarrow DK = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \triangle AKB$ vuông tại K nên

$AK \perp BK$ (đpcm)

*Vì $\angle AKO + \angle ADO = 180^\circ \Rightarrow AKOD$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle AKD = \angle AOD = \angle DOB = \frac{1}{2} \text{ số đo } \angle AOB (1)$

Mà $DK = AK = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle ADK$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{AKD} = \widehat{KAD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KAD} = \widehat{DOB}$

Mặt khác $\widehat{KAD} + \widehat{KOD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DOB} + \widehat{KOD} = 180^\circ$

Vậy B, O, K thẳng hàng (dpcm)

c) Gọi C' là điểm đối xứng C qua Y, nên Y là trung điểm của CC'

Mà Y là trung điểm BM nên $BCMC'$ là hình bình hành $\Rightarrow MC = BC'$

Vì $MC = BC'$. Vì $MC = BP \Rightarrow BC' = BP$

Lại có $BCMC'$ là hình bình hành nên $BC' \parallel CM \Rightarrow BC' \parallel AC \Rightarrow \widehat{NBC'} = \widehat{BAC}$ (đồng vị). Trong (O) có $\widehat{BAC} = \widehat{CBP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến đây cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \widehat{NBC'} = \widehat{CBP}$

Xét $\triangle CBP$ và $\triangle NBC'$ có:
$$\begin{cases} BP = BC' \\ \widehat{CBP} = \widehat{NBC'} \Rightarrow \triangle CBP = \triangle NBC' (c.g.c) \Rightarrow CP = NC' \\ BC = BN \end{cases}$$

Trong tam giác CNC' có $XC = XN, YC = YC'$ nên XY là đường trung bình tam giác

$$CNC' \Rightarrow \frac{XY}{NC'} = \frac{XY}{CP} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{XY}{CP} = \frac{1}{2}$$

Câu 6.

Trước tiên ta cần chứng minh bất đẳng thức phụ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \forall x, y > 0 (*)$

Ta có: $(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \stackrel{Co-si}{\geq} 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{xy}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Dấu "=" xảy ra khi

$x = y$. Ta có:

$$\frac{4a}{2020a+b^2} = \frac{4a}{(a+b+c)a+b^2} = \frac{4a}{a^2+ab+ac+b^2} = \frac{4a}{a(a+c)+b(a+b)}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$\frac{4a}{a(a+c)+b(a+b)} \leq a \left[\frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(a+b)} \right] = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}$$

Suy ra: $\frac{4a}{2020a+b^2} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}$. Tương tự ta có:

$$\frac{4b}{2020b+c^2} \leq \frac{1}{b+a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}; \frac{4c}{2020c+a^2} \geq \frac{1}{c+b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c+a}$$

Cộng vế theo vế ta có: $\frac{4a}{2020a+b^2} + \frac{4b}{2020b+c^2} + \frac{4c}{2020c+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} (dfcm)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2020}{3}$