

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 VÀO TRƯỜNG
THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2022-2023**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề gồm có 01 trang)

Môn thi : TOÁN (Chuyên)
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Khóa thi ngày : 14-16/2/2022

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn biểu thức :

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{507} + \sqrt{13} - \sqrt{48}} - 25$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + x^2 = y^3 + y^2$

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm các hệ số $a; b$ biết (d) đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ và có đúng một điểm chung với (P)

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x + 2y - 4xy = 3 \\ 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4xy = 3 \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Dựng đường kính NP của đường tròn (O) vuông góc với BC tại M (P nằm trên cung nhỏ BC). Tia phân giác của $\angle ABC$ cắt AP tại I

a) Chứng minh $PI = PB$

b) Chứng minh $\angle IMB = \angle INA$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và có tâm đường tròn ngoại tiếp là O . Lấy điểm D bên trong tam giác ABC sao cho $\angle BDC = 2\angle BAC$ (AD không vuông góc với BC)

a) Chứng minh bốn điểm B, C, D, O cùng nằm trên một đường tròn

b) Chứng minh OD là đường phân giác ngoài của $\angle BDC$ và tổng $BD + CD$ bằng hai lần khoảng cách từ A đến đường thẳng OD

Câu 6. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{1}{4+x^2+y^2} + \frac{1}{4+y^2+z^2} + \frac{1}{4+z^2+x^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Không dùng máy tính bỏ túi, hãy rút gọn biểu thức : $A = \sqrt[3]{\sqrt{507} + \sqrt{13} - \sqrt{48}} - 25$

Ta có $13 - \sqrt{48} = 13 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 1)^2$ và $\sqrt{507} = 13\sqrt{3}$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{13\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 1 - 25} = \sqrt[3]{15\sqrt{3} - 26} = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 2)^3} = \sqrt{3} - 2$$

d) Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + x^2 = y^3 + y^2$

$$\text{Ta có : } x^3 + x^2 = y^3 + y^2 \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + (x^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = a \in \mathbb{Z} \\ x^2 + xy + y^2 + x + y = 0 (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)x + y^2 + y = 0$$

$$\Delta_x = (y + 1)^2 - 4(y^2 + y) = -3y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow y \in \{-1; 0\}$$

$$\begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình $(x; y) = \{(a; a); (-1; 0); (0; -1)\}$

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm các hệ số $a; b$ biết (d) đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ và có đúng một điểm chung với (P)

$$\text{Vì } (d): y = ax + b \text{ đi qua } A\left(1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{3}{2} = a + b \Rightarrow b = \frac{3}{2} - a \Rightarrow (d): y = ax + \frac{3}{2} - a$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$2x^2 = ax + \frac{3}{2} - a \Leftrightarrow 2x^2 - ax + a - \frac{3}{2} = 0(*)$$

Để (P) và (d) có đúng 1 điểm chung thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (-a)^2 - 4.2\left(a - \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \Rightarrow b = -\frac{9}{2} \\ a = 2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (a; b) \in \left\{ \left(2; -\frac{1}{2} \right); \left(6; -\frac{9}{2} \right) \right\}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

c) **Giải phương trình** $3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0$

$$3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{9-x^2} + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{3-x} - 2x\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{3+x} + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} (3 - \sqrt{3+x}) - 2x(\sqrt{3+x} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3-x} + 2x)(3 - \sqrt{3+x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3-x} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 3-x = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \\ \sqrt{3+x} = 3 \Rightarrow 3+x = 9 \Leftrightarrow x = 6 \end{cases}$$

Vậy $x = -1; x = 6$ là các nghiệm của phương trình

d) **Giải hệ phương trình**
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4x + 2y - 4xy = 3 \\ 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2 + 2(2x+y) = 3 \\ (2x+y)^2 + 2(x-2y) = 3 \end{cases}$$

Đặt $x-2y=a, 2x+y=b$, ta có hệ

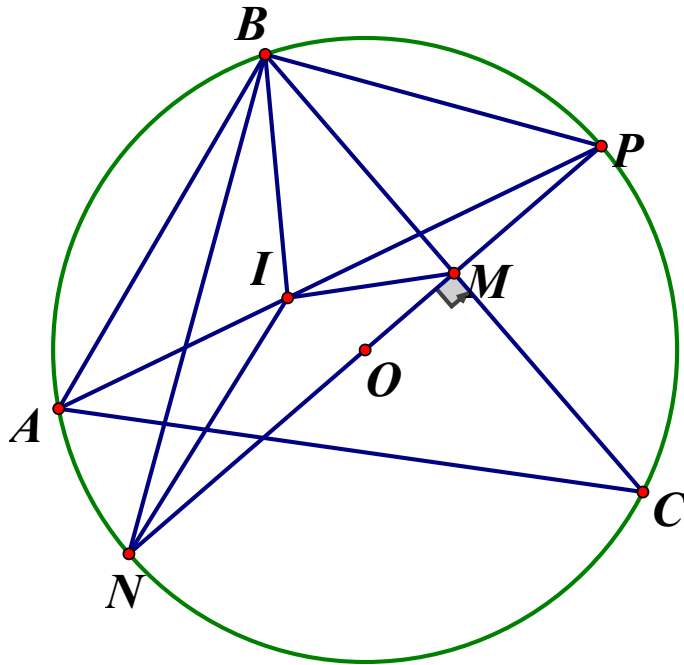
$$\begin{cases} a^2 + 2b = 3 \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 - 2(a-b) = 0 \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b-2) = 0 \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=b \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (b-1)(b+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \\ a=3; b=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} a=2-b \\ b^2 + 2a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-b \\ b^2 + 2(2-b) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5} \right), \left(-\frac{9}{5}; \frac{3}{5} \right)$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Dựng đường kính NP của đường tròn (O) vuông góc với BC tại M (P nằm trên cung nhỏ BC). Tia phân giác của $\angle ABC$ cắt AP tại I



c) Chứng minh $PI = PB$

Ta có :

$$\angle PBC = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{PC} \text{ (chắn cung PC)}, \angle CBI = \frac{1}{2} \angle ABC \text{ (BI là phân giác của } \angle ABC)$$

$$\Rightarrow \angle PBI = \angle PBC + \angle CBI = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{PC} + \frac{1}{2} \angle ABC \quad (1)$$

$$\angle BAI = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{PB} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{PB}), \angle ABI = \frac{1}{2} \angle ABC \text{ (BI là phân giác của } \angle ABC)$$

$$\Rightarrow \angle BIP = \angle BAI + \angle ABI = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{PB} + \frac{1}{2} \angle ABC \quad (2)$$

$$\text{Mà } NP \perp BC \text{ nên P là điểm chính giữa của } \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{PB} = \widehat{PC} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \angle PBI = \angle BIP \Rightarrow \triangle BPI \text{ cân tại P} \Rightarrow PB = PI \text{ (dpcm)}$$

d) Chứng minh $\angle IMB = \angle INA$

Vì NP là đường kính của (O) nên $\angle NBP = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác NBP vuông tại B có $BM \perp NP$ ta có : $PM.PN = PB^2$ (hệ thức lượng)

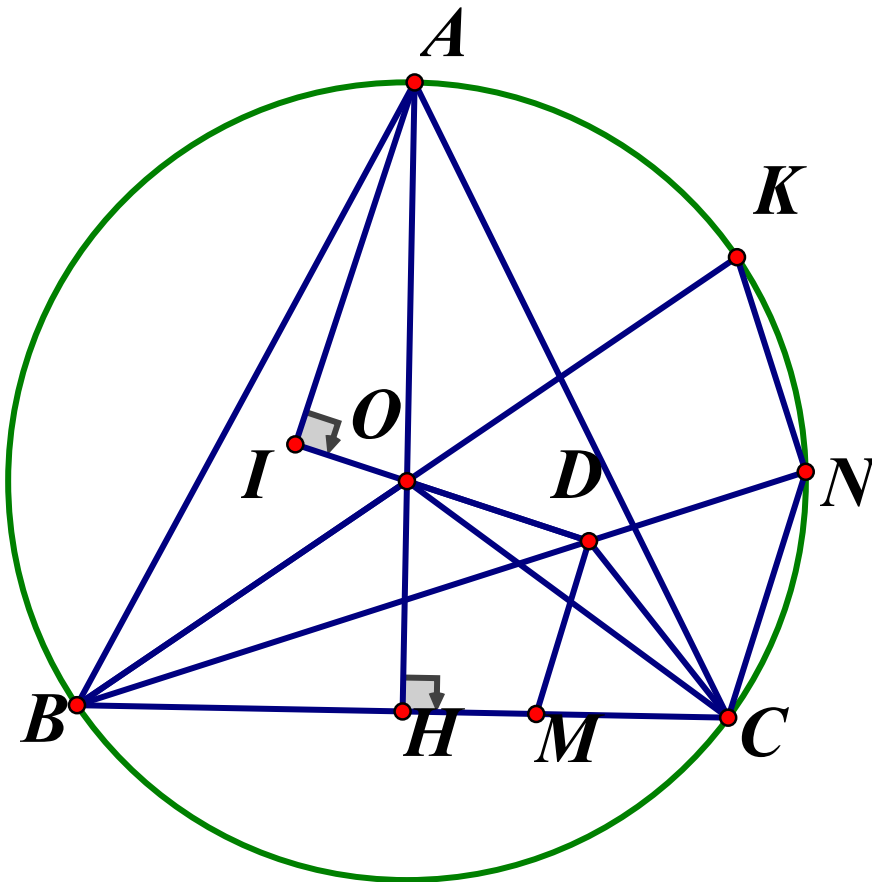
$$\Rightarrow PM.PN = PI^2 \Rightarrow \frac{PM}{PI} = \frac{PI}{PN}. \text{ Xét } \triangle PMI \text{ và } \triangle PIN \text{ có :}$$

$$\angle IPM \text{ chung}; \frac{PM}{PI} = \frac{PI}{PN} \Rightarrow \Delta PMI \sim \Delta PIN \Rightarrow \angle PMI = \angle PIN \Rightarrow \angle IMN = \angle NIA$$

Mà $\angle IMN + \angle IMB = 90^\circ (BC \perp NP)$, $\angle NIA + \angle INA = 90^\circ$ (Do $\angle ANP = 90^\circ$: góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle IMB = \angle INA$ (dpcm)

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và có tâm đường tròn ngoại tiếp là O . Lấy điểm D bên trong tam giác ABC sao cho $\angle BDC = 2\angle BAC$ (AD không vuông góc với BC)



c) Chứng minh bốn điểm B, C, D, O cùng nằm trên một đường tròn

Ta có $\angle BOC = 2\angle BAC$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BC}$)

$$\Rightarrow \angle BDC = 2\angle BAC (gt) \Rightarrow \angle BOC = \angle BDC$$

Xét tứ giác $BODC$ có $\angle BOC = \angle BDC$, mà 2 góc này liên kề $\Rightarrow$ tứ giác $BODC$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 4 điểm B, O, D, C cùng thuộc một đường tròn

d) Chứng minh OD là đường phân giác ngoài của $\angle BDC$ và tổng $BD + CD$ bằng hai lần khoảng cách từ A đến đường thẳng OD

Gọi DM là phân giác trong của tam giác BDC ($M \in BC$)

AO kéo dài cắt BC tại $H \Rightarrow AH \perp BC$ (do tam giác ABC cân tại A)

Tứ giác $BODC$ nội tiếp nên $\angle ODB = \angle OCB$

DM là phân giác $\angle BDC$ nên $\angle BDM = \frac{1}{2} \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle HOC$ ($OB=OC$ nên tam giác OBC cân tại O , do đó OH vừa là đường cao vừa là đường phân giác)

Mà $\angle OCB + \angle HOC = 90^\circ$ (do $AH \perp BC$) $\Rightarrow \angle ODM = \angle ODB + \angle BDM = 90^\circ$

$\Rightarrow OD \perp DM \Leftrightarrow OD$ là đường phân giác ngoài của $\triangle BDC$

+) Kéo dài BD cắt đường tròn (O) tại N . Đặt AI vuông góc với OD tại I

Ta có $\angle BDC = \angle BOC = sd \widehat{BC}$

$\angle BDC = \angle DNC + \angle DCN$ (góc ngoài $\triangle DNC$)

$\angle DNC = \frac{1}{2} sd \widehat{BC}$ (góc nội tiếp chắn cung BC)

$\Rightarrow \angle DNC = \angle DCN = \frac{1}{2} sd \widehat{BC} \Rightarrow \triangle DNC$ cân tại D nên $DN = DC$

$\Rightarrow DB + DC = DB + DN = BN$

Đặt đường kính BK của đường tròn (O)

Có $\angle BKN = \frac{1}{2} sd \widehat{BN} = \frac{1}{2} sd \widehat{BC} + \frac{1}{2} sd \widehat{CN}$

$\angle AOI = \angle HOD = \angle HOC + \angle COD = \frac{1}{2} \angle BOC + \angle CBD = \frac{1}{2} sd \widehat{BC} + \frac{1}{2} sd \widehat{CN}$

$\Rightarrow \angle BKN = \angle AOI$

$\angle AIO = 90^\circ$ ($AI \perp OD$), $\angle BNK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle AIO = \angle BNK$

Xét $\triangle AOI$ và $\triangle BKN$ có : $\angle BKN = \angle AOI$; $\angle AIO = \angle BNK$

$\Rightarrow \triangle AOI \sim \triangle BKN \Rightarrow \frac{BN}{AI} = \frac{BK}{AO} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow BN = 2AI \Rightarrow BD + CD = 2AI$ (đpcm)

Câu 6. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{4+x^2+y^2} + \frac{1}{4+y^2+z^2} + \frac{1}{4+z^2+x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số dương ta có :

$$4+x^2+y^2=1+x^2+1+y^2+2\geq 2x+2y+2\Rightarrow \frac{1}{4+x^2+y^2}\leq \frac{1}{2(x+y+1)}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{4+y^2+z^2}\leq \frac{1}{2(y+z+1)}; \frac{1}{4+z^2+x^2}\leq \frac{1}{2(z+x+1)}$$

$$\Rightarrow P\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}\right)$$

$$\text{Đổi biến } (x; y; z)\Rightarrow (a^3; b^3; c^3)\Rightarrow abc=1$$

$$\frac{1}{x+y+1}+\frac{1}{y+z+1}+\frac{1}{z+x+1}=\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}$$

$$\text{Ta có } a^3+b^3\geq ab(a+b)\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1}\leq \frac{1}{ab(a+b)+1}=\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{abc}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{1}{b^3+c^3+1}\leq \frac{a}{a+b+c}; \frac{1}{c^3+a^3+1}\leq \frac{b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow P\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Max } P=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$$