

Ngày thi: 17/07/2020

Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tìm x để P là số nguyên

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = -\frac{3}{4}x + 3$ có đồ thị (d)

- a) Vẽ đồ thị (d)
- b) Gọi A là giao điểm của (d) với trục tung Oy , B là giao điểm của (d) với trục hoành Ox . Tính chu vi tam giác OAB và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d)

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho phương trình : $m(m^2x - m - 2) = 8x + 4$ với m là tham số, $m \neq 2$

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm nhỏ hơn -2

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho đường tròn (O) có AB là đường kính. Vẽ đường kính CD không trùng với AB . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt các đường thẳng BC và BD lần lượt tại E và F . Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng AF

- a) Chứng minh : $ACBD$ là hình chữ nhật
- b) Chứng minh QO song song với BF và $\triangle BQC$ là tam giác cân
- c) Chứng minh $EB \cdot EC + FB \cdot FD = 2CD^2$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho đa giác đều 24 cạnh $A_1A_2.....A_{23}A_{24}$. Có tất cả bao nhiêu tam giác vuông nhưng không phải là tam giác vuông cân được tạo thành từ các đỉnh trên ?

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c sao cho $a \geq 0, b \geq \frac{3}{2}, c \geq 5$ và $a^2 + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{9} \leq 12$

Tìm giá trị lớn nhất của $M = \sqrt{2ab - 3a} + \sqrt{ca + 8c} + 2\sqrt{c - 5}$

Câu 7. (1,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Gọi O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm, trọng tâm của tam giác trên. Gọi E là điểm tùy ý sao cho luôn tạo thành $\triangle EHG$ và $\triangle EOG$. Chứng minh tỉ số diện tích $\triangle EHG$ và diện tích $\triangle EOG$ không phụ thuộc vào vị trí điểm E

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2(\sqrt{x} - 3)^2 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} - 3x - 24}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(x + 8)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$b) \text{Ta có: } P > 0, P \in \mathbb{Q} \text{ và } \left(\sqrt{x} - \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{P^2 + 4P - 32}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{(P - 4)(P + 8)}{4}$$

$$\Rightarrow P \geq 4, P \in \mathbb{Q} \text{ \& } \left|\sqrt{x} - \frac{P}{2}\right| = \frac{\sqrt{(P - 4)(P + 8)}}{2}$$

$$8 \geq P \geq 4, P \in \mathbb{Q}$$

$$x = \left(\frac{P - \sqrt{(P - 4)(P + 8)}}{2}\right)^2; x = \left(\frac{P + \sqrt{(P - 4)(P + 8)}}{2}\right)^2$$

$$P > 8, P \in \mathbb{Q}; x = \left(\frac{P + \sqrt{(P - 4)(P + 8)}}{2}\right)^2$$

Câu 2.

a) Học sinh tự vẽ đồ thị

$$b) \text{ Tọa độ các giao điểm } A(0;3); B(4;0); OA = OB = 4 \Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Chu vi tam giác OAB : $OA + OB + AB = 3 + 4 + 5 = 12$

Vẽ $OH \perp AB$ tại H. Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác OAB vuông tại O có đường cao

$$OH, \text{ ta có: } OH = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{12}{5}$$

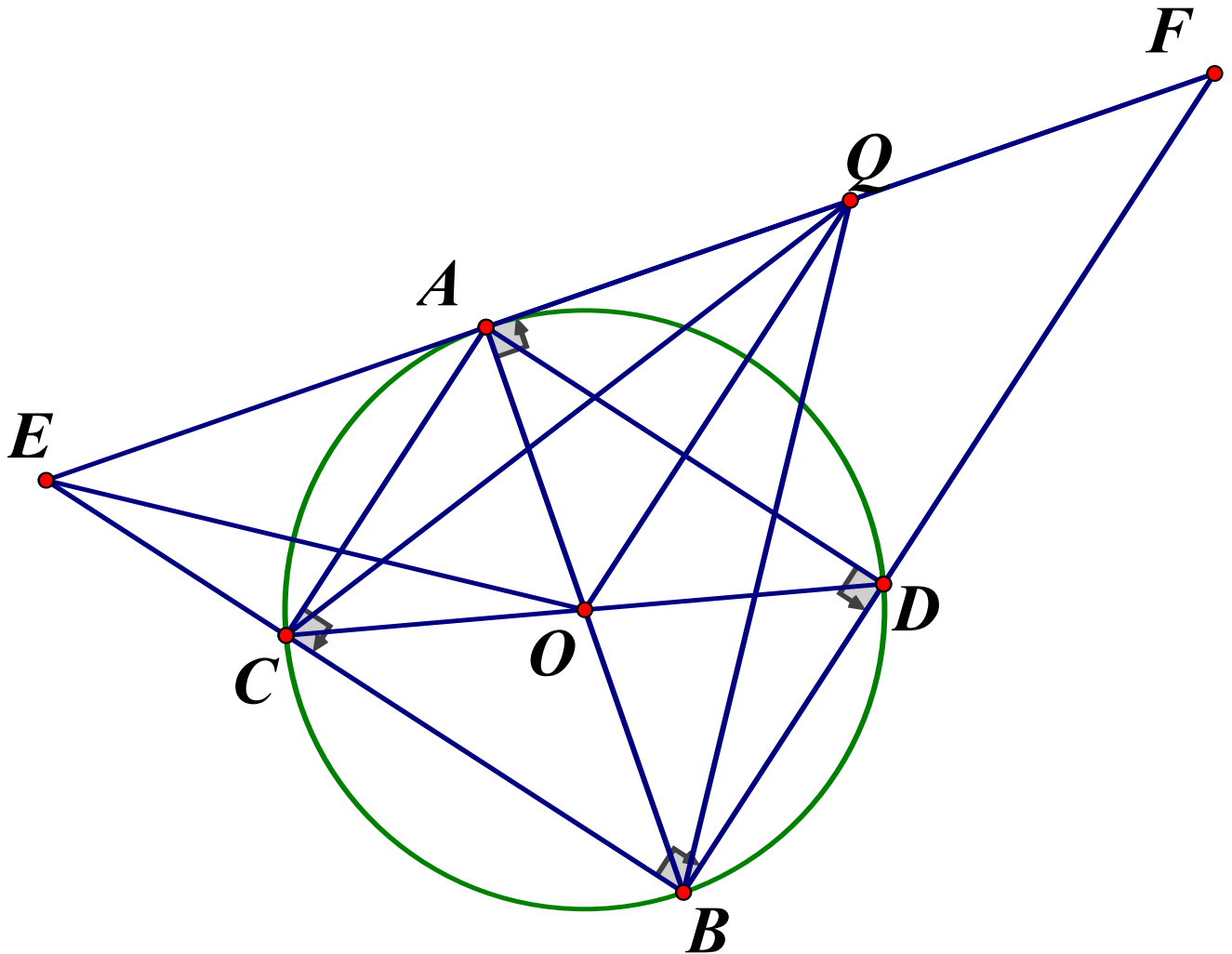
Câu 3.

$$m(m^2x - m - 2) = 8x + 4 \Leftrightarrow (m^3 - 8)x = m^2 + 2m + 4 \Leftrightarrow (m - 2)x = 1$$

(vì $m^2 + 2m + 4 = (m+1)^2 + 3 > 0$). Phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{m-2}$

$$x = \frac{1}{m-2} < -2 \Leftrightarrow \frac{2m-3}{m-2} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

Câu 4.



a) Vì AB là đường kính nên $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$

Vì CD là đường kính nên $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ \Rightarrow ACBD$ là hình chữ nhật

b) Vì O là trung điểm AB , Q là trung điểm AF nên QO là đường trung bình tam giác $ABF \Rightarrow QO \parallel BF$

Mà $BC \perp BF \Rightarrow QO \perp BC$

Vì $QO \perp BC$ nên QO đi qua trung điểm BC (tính chất đường kính dây cung)

$\triangle BQC$ có QO vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle BQC$ cân tại Q

c) $\triangle BEA$ vuông tại A có AC đường cao nên $EA^2 = EB \cdot EC$

ΔBFA vuông tại A có AD là đường cao nên $FA^2 = FB.FD$

$$\Rightarrow EB.EC = FB.FD = EA^2 + FA^2$$

Mà $EA^2 + FA^2 \geq 2.EA.FA$ (Co-si) và $EA.FA = AB^2 = CD^2$

$$\text{Vậy } EB.EC + FB.FD \geq 2CD^2$$

Câu 5.

Đa giác đều $A_1A_2.....A_{23}A_{24}$ sẽ nội tiếp đường tròn tâm O và $A_1A_{13}, A_2A_{14},, A_{12}A_{24}$ là 12 đường kính của đường tròn trên.

Từ đường kính A_1A_{13} ta có 22 tam giác vuông

$$A_1A_{13}A_2, A_1A_{13}A_3,, A_1A_{13}A_{12}, A_1A_{13}A_{14},, A_1A_{13}A_{24}$$

Trong 22 tam giác vuông trên thì có 2 tam giác cân là $A_1A_{13}A_7, A_1A_{13}A_{19}$

Tương tự cho các đường kính khác, tổng cộng ta có 240 tam giác thỏa đề bài

Câu 6.

$$\sqrt{2ab-3a} = \sqrt{a(2b-3)} \leq \frac{a+2b-3}{2}; \sqrt{c(a+8)} \leq \frac{c+a+8}{2}$$

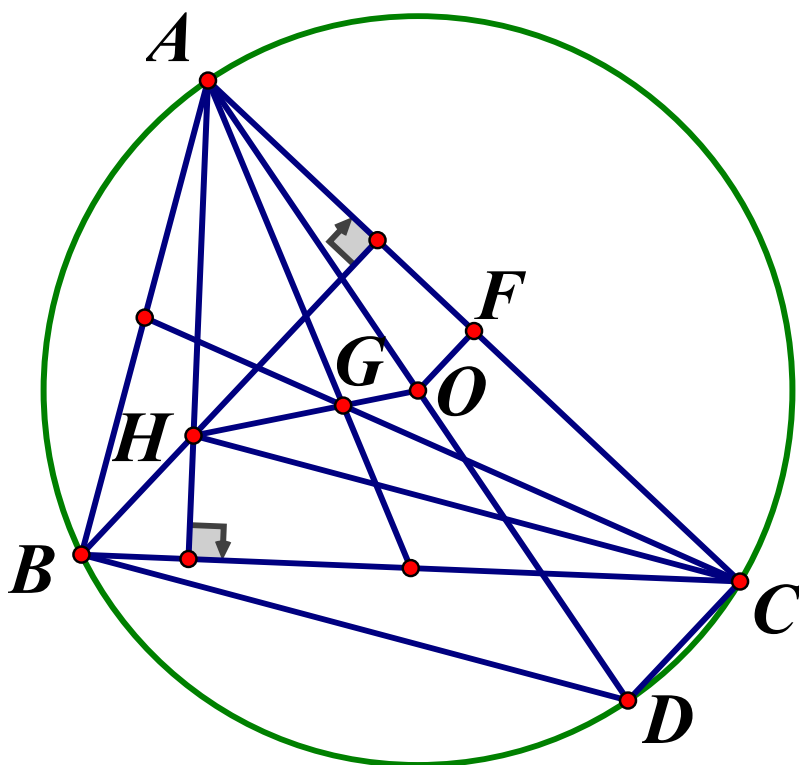
$$2\sqrt{c-5} = \sqrt{4(c-5)} \leq \frac{4+c-5}{2} \Rightarrow M \leq a+b+c+2$$

$$\text{Ta có: } a \leq \frac{a^2+1}{2}; b \leq \frac{b^2+4}{4}; c \leq \frac{c^2+81}{18}$$

$$\Rightarrow a+b+c \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{18} + 6 \leq 12 \Rightarrow M \leq 14$$

$$\text{Vậy } \text{Max } M = 14 \Leftrightarrow a=1; b=2; c=9$$

Câu 7.



Vẽ đường kính AD

Ta có: $BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc AC)

$CH \parallel BD$ ($\perp AB$) $\Rightarrow BHCD$ là hình bình hành

Gọi F là trung điểm AC , vì OF là đường trung bình của $\triangle ADC$ và $BHCD$ là hình bình hành nên $OF \parallel BH$, $OF = \frac{1}{2}BH$

Vì $\frac{BG}{FG} = \frac{BH}{FO} = 2$; $\angle HBG = \angle OFG \Rightarrow \triangle BHG \sim \triangle FOG$ (c.g.c)

$\Rightarrow \frac{GH}{GO} = 2$; $\angle HGB = \angle OGF$

Suy ra ba điểm O, H, G thẳng hàng (vì $\angle HGB + \angle OGB = 180^\circ$) và $GH = 2GO \Rightarrow \frac{S_{\triangle EHG}}{S_{\triangle EOG}} = 2$