

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 07 bài, 01 trang)

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. (4.0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. Rút gọn biểu thức P và tính

giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Bài 2. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{5x + 11} = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x - 1} + 1) + \sqrt{x - 1} = 0 \\ (x - 1)\sqrt{x - 1} - 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases}$.

Bài 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(2m + 1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$. (x là ẩn số, m là tham số) (*). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa $|x_1| = 2|x_2|$.

Bài 4. (2.0 điểm)

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực $a, b > 0$, ta luôn có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z} + \frac{1}{z + x} = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{3x + 3y + 2z} + \frac{1}{3y + 3z + 2x} + \frac{1}{3z + 3x + 2y}$.

Bài 5. (3.0 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$.

b) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$. Với mọi số nguyên n lẻ, chứng minh A chia hết cho 384.

Bài 6. (4.0 điểm)

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO . Trên nửa đường tròn (O') lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt nửa đường tròn (O) tại C . Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với nửa đường tròn (O') .

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

b) Đường thẳng AM cắt OD tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N . Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

Bài 7. (1.0 điểm)

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = a$. Đường tròn đường kính AB cắt AC và BC lần lượt tại M và N . Tính độ dài đoạn thẳng MN theo a .

----- **Hết** -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm!

- Họ tên thí sinh.....Số báo danh.....

Bài 1. (4.0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$.

b) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$. Rút gọn biểu thức P và tính

giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Bài	Nội dung	Điểm
1		4.0
	a) Rút gọn biểu thức	2.0
	Ta có $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{6}(\sqrt{5} - 1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$	0.5
	$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$	0.5
	$= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$	0.5
	$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \frac{1}{2}$.	0.5
	b) Rút gọn biểu thức P và tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.	2.0
	ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$. $P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy}$	0.5
	$= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy}$	
	$= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$,	0.5
	$x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$ $\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} - 1$	0.5
	$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$.	0.5

Bài 2. (4.0 điểm)

a) Giải phương trình $2\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{5x + 11} = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \\ (x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases}.$$

2		4.0
	a) Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0.$	2.0
	Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$	0.5
	$2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5x+11}$ $\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3} = 5x+11 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-3} = 3-x$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x^2+5x-3 = 9-6x+x^2 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+11x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12(l) \\ x = 1(n) \end{cases}.$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}.$	0.5
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 & (1) \\ (x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2}y = 0 & (2) \end{cases}$	2.0
	Điều kiện: $x \geq 1$ $y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y - \sqrt{x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \sqrt{x-1} \end{cases}$	0.5
	Với $y = 1$, thay vào (2) ta được $(x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (n)}$	0.5
	Với $y = \sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $(x-1)\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2}\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(x-1-2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = 1+2\sqrt{2} & (n) \end{cases}$	0.5
	Với $x = 1 \Rightarrow y = 0.$ Với $x = 1+2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{1+2\sqrt{2}-1} = \sqrt{2\sqrt{2}}.$ Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(3;1); (1;0); (1+2\sqrt{2}; \sqrt{2\sqrt{2}})$	0.5

Bài 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0.$ (x là ẩn số, m là tham số) (*). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa $|x_1| = 2|x_2|.$

3		2.0
	Ta có $\Delta' = (2m+1)^2 - (4m^2 + 4m - 3) = 4 > 0$, với mọi $m.$	0.5

	Vậy (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m . Giải phương trình ta được $x_1 = 2m - 1$; $x_2 = 2m + 3$	
	$ x_1 = 2 x_2 \Leftrightarrow 2m - 1 = 2 2m + 3 $	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 2(2m + 3) \\ 2m - 1 = -2(2m + 3) \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{2}$ hoặc $m = -\frac{5}{6}$.	0.5

Bài 4. (2.0 điểm)

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực $a, b > 0$, ta luôn có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

b) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3y+3z+2x} + \frac{1}{3z+3x+2y}$.

4		2.0
	a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng) Vậy với mọi số thực $a, b > 0$, ta luôn có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.	0.5
	b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ Ta có $\frac{1}{3x+3y+2z} = \frac{1}{(2x+y+z) + (x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right)$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y) + (x+z)} + \frac{1}{(x+y) + (y+z)} \right)$ $\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right)$	0.5
	Tương tự $\frac{1}{3y+3z+2x} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right); \frac{1}{3z+3x+2y} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right)$	0.5
	Cộng từng vế của bất đẳng thức ta được: $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3y+3z+2x} + \frac{1}{3z+3x+2y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P khi $x = y = z = \frac{1}{4}$.	0.5

Bài 5. (3.0 điểm)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$.

b) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$. Với mọi số nguyên n lẻ, chứng minh A chia hết cho 384.

5		3.0
	a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2$.	1.5
	Ta có	0.5

$x^2 - xy + y^2 = 2x - 3y - 2 \Leftrightarrow x^2 - (y+2)x + y^2 + 3y + 2 = 0 \quad (1)$ $\Delta = (y+2)^2 - 4(y^2 + 3y + 2) = -3y^2 - 8y - 4$	
Để phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Rightarrow -3y^2 - 8y - 4 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq y \leq -\frac{2}{3}$ Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y = -2; y = -1$	0.5
Với $y = -2$ từ (1) $\Rightarrow x = 0(n)$ Với $y = -1$ từ (1) $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (n) \\ x = 1 & (n) \end{cases}$ Vậy $(x; y) = (0; -2), (0; -1), (1; -1)$.	0.5
b) Cho $A = n^4 - 10n^2 + 9$. Với mọi số nguyên n lẻ, chứng minh A chia hết cho 384 .	1.5
Ta có: $A = n^4 - 10n^2 + 9 = n^4 - n^2 - 9n^2 + 9 = n^2(n^2 - 1) - 9(n^2 - 1)$ $= (n^2 - 1)(n^2 - 9) = (n-1)(n+1)(n-3)(n+3)$	0.5
Theo giả thiết n là số nguyên lẻ, nên đặt $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z})$, ta viết lại $A = (2k+2).2k.(2k+4)(2k-2) = 16(k+1).k.(k+2)(k-1)$	0.5
Ta nhận thấy rằng $(k+1), k, (k+2), (k-1)$ là 4 số nguyên liên tiếp nên sẽ chia hết cho $2.3.4 = 24 \Rightarrow A : (16.24)$ hay $A : 384$ với mọi số nguyên n lẻ.	0.5

Bài 6. (4.0 điểm)

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn (O) đường kính AB và nửa đường tròn (O') đường kính AO . Trên nửa đường tròn (O') lấy điểm M (khác A và O), tia OM cắt nửa đường tròn (O) tại C . Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với nửa đường tròn (O') .

a) Chứng minh tam giác ADM cân.

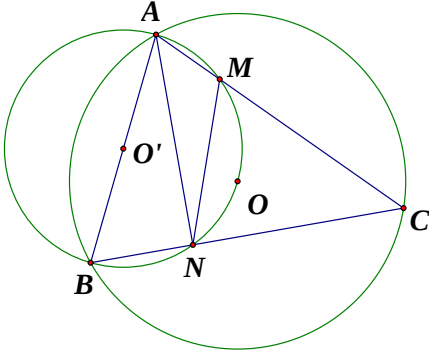
b) Đường thẳng AM cắt OD tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N . Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.

6		4.0
	a) Chứng minh tam giác ADM cân.	2.0
	Ta có $OA = OC \Rightarrow \Delta AOC$ cân tại O .	0.5
	Mà $\angle ADO = 90^\circ \Rightarrow OD \perp AC$ suy ra OD cũng là đường phân giác của góc AOC .	0.5
	$\Rightarrow \angle AOD = \angle COD$	0.5
	$\Rightarrow DA = DM \Rightarrow \Delta ADM$ cân tại D	0.5
	b) Đường thẳng AM cắt OD tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N . Chứng minh ba điểm A, M, N thẳng hàng.	2.0
	Do đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là N	
	Suy ra tứ giác $CHON$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CNH = \angle COH = \frac{1}{2} \angle COA$.	0.5

	Mặt khác $CNA = \frac{1}{2}COA$.	
	$\Rightarrow CNA = CNH \Rightarrow A, H, N$ thẳng hàng. (1)	0.5
	Mặt khác A, H, M thẳng hàng (2)	0.5
	Từ (1) và (2) suy ra ba A, M, N thẳng hàng.	0.5

Bài 7. (1.0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = a$. Đường tròn đường kính AB cắt AC và BC lần lượt tại M và N . Tính độ dài đoạn thẳng MN theo a .

7		1.0
		
	Ta có tứ giác $MNBA$ nội tiếp đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \angle ABC = \angle NMC$ Xét $\triangle CMN$ và $\triangle CBA$ có $\angle MCN$ chung, $\angle ABC = \angle NMC$ $\Rightarrow \triangle CMN \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (1)	0.5
	Mà $\angle ANB = 90^\circ \Rightarrow \angle ANC = 90^\circ$ $\triangle NAC$ vuông tại N có $CN = CA \cos \angle ACN \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.	0.5

HẾT ./.