

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (4,0 điểm):

Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right), \quad (x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1).$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{1 + 2024^2 + \frac{2024^2}{2023^2}} - 2023 \frac{1}{2023}; y = 31 \frac{3}{2024}.$

Câu 2 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình: $(x + 5)^2 - 3(4x + 7) = 32 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y)(1 + xy) = 5xy \\ (x^2 + y^2) \cdot \frac{x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2} = 9 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm):

Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + \frac{1}{2}$

a) Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

c) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P), tìm tập hợp các trung điểm C của đoạn thẳng AB khi m thay đổi.

Câu 4 (2,0 điểm):

Bạn Hoàng mua ba cuốn sách tham khảo cho ba môn gồm Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh hết tất cả 324 000 đồng. Biết rằng tiền mua cuốn sách Toán bằng $\frac{2}{7}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Tiếng Anh, tiền mua cuốn sách Tiếng Anh bằng $\frac{4}{5}$

tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Toán. Hỏi bạn Hoàng đã mua mỗi cuốn sách hết bao nhiêu tiền?

Câu 5 (2,0 điểm):

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn

$$a^2b^2 + a^2 - 4a + 4(b-1)^2 - 2ab(a+2b-4) = 1$$

b) Cho ba số x, y, z thỏa mãn $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$. Chứng minh rằng

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10$$

Câu 6 (6,0 điểm):

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$, trên dây AD lấy điểm P sao cho $AP = DC$. Gọi Q là giao điểm của DA và BC .

a) Chứng minh rằng $DB \cdot DC = DA \cdot DQ$.

b) Chứng minh rằng $DA = DB + DC$.

c) Chứng minh rằng $\frac{DQ}{DB} + \frac{DQ}{DC} = 1$.

d) Tính tổng $DA^2 + DB^2 + DC^2$ theo R .

--- HẾT ---

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu	Hướng dẫn	Thang điểm
1a) (2,0 điểm)	$P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$	
	Cho biểu thức:	
		0,5
		0,5