

ĐỀ THI HSG TOÁN 9 NĂM HỌC 2021 - 2022

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
VĨNH LONG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2021 – 2022

Khóa thi ngày 26.3.2022

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi có 07 câu, 01 trang

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \sqrt{7})^3 + (1 + \sqrt{7})^3$.

b) Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Rút gọn biểu thức P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x - 2y} + 2\sqrt{x + 2y} = 6 \\ 3\sqrt[3]{3x - 2y} - 4\sqrt{x + 2y} = -22 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $2(2x - 1) - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - (m + 1)x + m - 4 = 0$, m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1^2 - mx_1 + m)(x_2^2 - mx_2 + m) = 2$.

Câu 4. (2.5 điểm)

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2023k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Câu 5. (3.0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R , dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A . Kẻ đường kính CD , kẻ BH vuông góc với CD tại H .

a) Chứng minh AO vuông góc với BC . Cho biết $R = 15$ cm, $BC = 24$ cm. Tính AB, OA .

b) Gọi I là giao điểm của AD và BH , E là giao điểm của BD và AC . Chứng minh $IH = IB$.

Câu 6. (2.5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB vuông góc với dây MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn $(O; R)$, đoạn thẳng AC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm K (K khác A), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh $CA \cdot CK = CE \cdot CH$.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AC , (d) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

Câu 7. (2.0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

a) $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ b) $\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq \frac{3}{2}$.

- Hết -

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.

- Giám thị không giải thích thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu 1. (4.0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - \sqrt{7})^3 + (1 + \sqrt{7})^3$.

b) Cho biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. Rút gọn biểu thức

P và tìm x nguyên dương để P nhận giá trị nguyên.

Câu		Điểm
1		4.0
	a) Ta có $(1 - \sqrt{7})^3 = 1^3 - 3.1^2.\sqrt{7} + 3.1(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{7})^3$	0.5
	$= 22 - 10\sqrt{7}$	0.5
	$(1 + \sqrt{7})^3 = 1^3 + 3.1^2.\sqrt{7} + 3.1(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^3 = 22 + 10\sqrt{7}$	0.5
	Khi đó $A = (1 - \sqrt{7})^3 + (1 + \sqrt{7})^3 = 44$.	0.5
	b) Ta có $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ $= \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{x})} + \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2)}$	0.5
	$= \frac{-(3x + \sqrt{9x} - 3) - (1 - x) + (x - 4)}{(\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{x})} = \frac{-2 - 3\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{x})} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$	0.5
	$P = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$	0.5
	Để P nguyên thì $1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$ nguyên $\Rightarrow 2 : \sqrt{x} - 1 \Rightarrow x \in \{4; 9\}$	0.5

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{3x - 2y} + 2\sqrt{x + 2y} = 6 \\ 3\sqrt[3]{3x - 2y} - 4\sqrt{x + 2y} = -22 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $2(2x - 1) - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

2		4.0
	a) Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{3x - 2y} \\ b = \sqrt{x + 2y} \end{cases}$, ta có hệ đã cho trở thành $\begin{cases} a + 2b = 6 \\ 3a - 4b = -22 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$	0.5

	Ta có $\begin{cases} a = \sqrt[3]{3x-2y} = -2 \\ b = \sqrt{x+2y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y = -8 \\ x+2y = 16 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$ Vậy tập nghiệm $S = \{(2;7)\}$.	0.5
	b) $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$ (*) Điều kiện: $x \geq \frac{8}{3}$	0.5
	$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{5x-6}-3)^2 + (\sqrt{3x-8}-1)^2 = 0$	1.0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6}-3=0 \\ \sqrt{3x-8}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ Vậy tập nghiệm $S = \{3\}$.	0.5

Câu 3. (2.0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 4 = 0$ (1), m là tham số. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1^2 - mx_1 + m)(x_2^2 - mx_2 + m) = 2$.

3		2.0
	$\Delta = (m+1)^2 - 4(m-4) = m^2 - 2m + 17 = (m-1)^2 + 16 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m . (Tính Δ 0.25 điểm, lập luận có hai nghiệm phân biệt 0.25 điểm)	0.5
	$x_1^2 - (m+1)x_1 + m - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - mx_1 + m = x_1 + 4$. Tương tự $x_2^2 - mx_2 + m = x_2 + 4$. (Mỗi ý 0.25 điểm)	0.5
	$(x_1^2 - mx_1 + m)(x_2^2 - mx_2 + m) = 2$ $\Leftrightarrow (x_1 + 4)(x_2 + 4) = 2 \Leftrightarrow x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = 2$ (*).	0.5
	Áp dụng định lý Viet, ta có: $(*) \Leftrightarrow (m-4) + 4(m+1) + 16 = 2 \Leftrightarrow 5m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-14}{5}$. Kết luận.	0.5

Câu 4. (2.5 điểm)

a) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2023k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2y(x-y) = 2(x+1)$.

4		2.5
	a) Giả sử $2023k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên. Suy ra $2023k = a^3 - 3$	0.5
	Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7. Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$. Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7	1.0

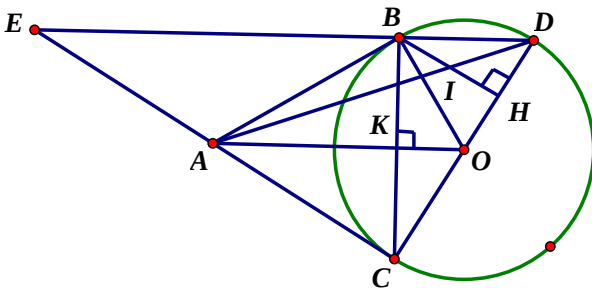
	Mà 2023k luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2023k$. (Mỗi ý 0.25 điểm)	
	b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$. $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0$ (1) Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3$	0.25
	$\Delta' = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$. Δ' chính phương nên $\Delta' \in \{0; 1; 4\}$	0.25
	+ Nếu $\Delta' = 4 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có : $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. + Nếu $\Delta' = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$. + Nếu $\Delta' = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$. + Với $y = 3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. + Với $y = -1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x; y) \in \{(0; 1); (4; 1); (4; 3); (0; -1)\}$. (Mỗi hai nghiệm 0.25 điểm)	0.5

Câu 5. (3.0 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R, dây BC khác đường kính. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại B và tại C cắt nhau ở A. Kẻ đường kính CD, kẻ BH vuông góc với CD tại H.

a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết $R = 15$ cm, $BC = 24$ cm. Tính AB, OA.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BH, E là giao điểm của BD và AC. Chứng minh $IH = IB$.

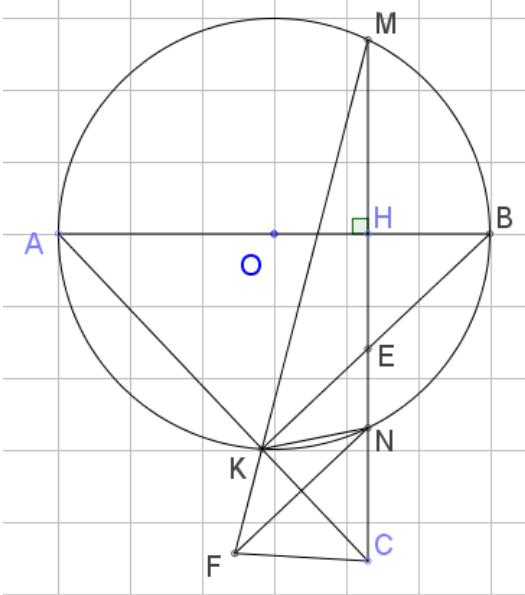
5		3.0
		
	a) Chứng minh AO vuông góc với BC. Cho biết bán kính R bằng 15 cm, dây BC = 24 cm. Tính AB, OA Ta có: $AB = AC$ (tính chất của tiếp tuyến đường tròn) $OB = OC$ (bán kính đường tròn).	0.25
	Suy ra OA là trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$ tại K	0.25
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO đường cao BK, ta có: $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BK^2} - \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{15^2} \Rightarrow AB = 20$ (cm)	0.5

(Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)	
Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông ABO, ta có: $OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{25^2} = 25 \text{ (cm)}$ (Công thức 0.25 điểm, tính đúng kết quả 0.25 điểm)	0.5
b) ΔDCE có $OA \parallel ED$ (cùng vuông góc với BC); $OC = OD = R$. Suy ra $EA = AC$ (1)	0.5
Ta lại có: $BH \parallel AC$ (cùng vuông góc với DC) Áp dụng hệ quả của định lý Ta-let, ta có: $\frac{BI}{AE} = \frac{ID}{DA} = \frac{IH}{AC}$ (2)	0.5
Từ (1) và (2) suy ra $BI = IH$.	0.5

Câu 6. (2.5 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB vuông góc với dây cung MN tại H (H nằm giữa O và B). Trên tia MN lấy điểm C nằm ngoài đường tròn $(O; R)$, đoạn thẳng AC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm K (K khác A), hai dây MN và BK cắt nhau ở E .

a) Chứng minh $CA \cdot CK = CE \cdot CH$.

b) Qua điểm N , kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AC , (d) cắt tia MK tại F . Chứng minh tam giác NCF cân.

6		2.5
		
	a) Xét ΔCKE và ΔCHA có $\widehat{CKE} = \widehat{CHA} = 90^\circ$ và $\widehat{KCE}$ chung Suy ra $\Delta CKE \sim \Delta CHA$	0.5
	nên $\frac{CK}{CH} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow CK \cdot CA = CH \cdot CE$	0.5
	b) Do $KB \parallel FN$ nên $\widehat{EKN} = \widehat{KNF}, \widehat{MKB} = \widehat{KFN}$ (1)	0.5
	Mặt khác $AB \perp MN$ tại H nên H là trung điểm của MN suy ra tam giác MNB cân tại $B \Rightarrow MB = NB \Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{EKN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung bằng nhau) (2)	0.5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KNF} = \widehat{KFN}$ nên tam giác KFN cân tại K suy ra KC là đường trung trực của $NF \Rightarrow \Delta CNF$ cân tại C .	0.5

Câu 7. (2.0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

a) $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ b) $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

7		2.0
	a) Thực hiện xét hiệu ta được: $(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$	0.25
	$= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$.	0.5
	$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.	0.25
	b) Ta thấy điểm rơi đạt tại $a = b = c = 1$. Ta có: $\frac{a}{1+b^2} = a \cdot \frac{1}{1+b^2} = a \cdot \left(1 - \frac{b^2}{1+b^2}\right) \geq a \cdot \left(1 - \frac{b}{2}\right) = a - \frac{ab}{2}$.	0.25
	Tương tự ta được: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$.	0.25
	Cộng vế với vế, ta có: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq (a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{2} \geq \frac{3}{2}$.	0.25
	Vì $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3 \Rightarrow (a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.	0.25

HẾT./.