

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2022-2023

Ngày thi : 08 tháng 6 năm 2022

Môn thi : **TOÁN (CHUYÊN)**

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-3} \right) \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (k-3)x + 4$ và $(d_2): y = (9-2k)x - 5$. Tìm k để (d_1) song song với (d_2)

Câu 3. (1,0 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm A ở ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm), gọi M là giao điểm của đoạn thẳng OA với (O) . Biết $AB = 2a$, $AM = a$. Tính bán kính của đường tròn đã cho theo a

Câu 4. (1,0 điểm) Cho đường thẳng $(d): y = x + \frac{28}{3}$ và parabol $(P): y = \frac{1}{3}x^2$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P)

Câu 5. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 4y + 5 = 0$ vô nghiệm

Câu 6. (1,0 điểm) Tìm m, n nguyên dương để phương trình $x^2 - 2(m-n)x + 2m - 3n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Câu 7. (1,0 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính BC , A là điểm nằm trên (O) ($AB < AC, A \neq B$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO cắt đoạn thẳng AC tại điểm thứ hai là K . Đường thẳng BK cắt (O) tại điểm thứ hai là L . Các đường thẳng CL, OK cắt nhau tại I . Chứng minh ba điểm A, B, I thẳng hàng

Câu 8. (2,0 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH ($H \in BC$), M là điểm bất kỳ trên cạnh BC , vẽ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AM

a) **(1,0 điểm)** Tứ giác $OEHF$ là hình gì

b) **(1,0 điểm)** Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $OEHF$ theo a khi M di động trên cạnh BC

Câu 9. (1,0 điểm) Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Chứng minh $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x^3 + y^3 \leq 1$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-3} \right) \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

Ta có :

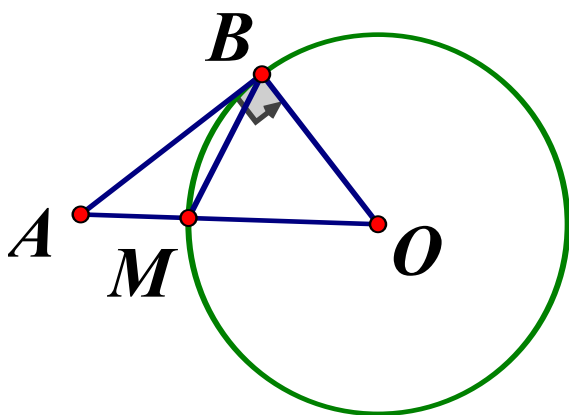
$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-3} \right) \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \right] \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \\ &= \left[\frac{3}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} - \frac{2}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \right] \cdot (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \cdot \sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 1 \end{aligned}$$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (k-3)x + 4$ **và** $(d_2): y = (9-2k)x - 5$. **Tìm** k **để** (d_1) **song song với** (d_2)

$$\text{Để } (d_1) // (d_2) \text{ thì } \begin{cases} k-3 = 9-2k \\ 4 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4$$

Vậy $k = 4$ là giá trị cần tìm

Câu 3. (1,0 điểm) Cho đường tròn (O) **và điểm** A **ở ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến** AB **với** (O) **(B là tiếp điểm), gọi** M **là giao điểm của đoạn thẳng** OA **với** (O) . **Biết** $AB = 2a, AM = a$. **Tính bán kính của đường tròn đã cho theo** a



Gọi $x (x > 0)$ là bán kính của (O) thì $OB = x, OA = x + a$

Do AB là tiếp tuyến nên $\triangle ABO$ vuông tại B nên $OA^2 = AB^2 + OB^2$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 = (2a)^2 + x^2 \Leftrightarrow x = \frac{3a}{2}$$

Vậy bán kính của (O) là $\frac{3a}{2}$

Câu 4. (1,0 điểm) Cho đường thẳng (d): $y = x + \frac{28}{3}$ và parabol (P): $y = \frac{1}{3}x^2$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là :

$$\frac{1}{3}x^2 = x + \frac{28}{3} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \Rightarrow y = \frac{16}{3} \\ x = 7 \Rightarrow y = \frac{49}{3} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $\left(-4; \frac{16}{3}\right); \left(7; \frac{49}{3}\right)$

Câu 5. (1,0 điểm) Chứng minh phương trình $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 4y + 5 = 0$ vô nghiệm

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + 4x^2 - 4x + 1 + y^2 + 4y + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-y)^2 + (2x-1)^2 + (y+2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x-1=0(*) \\ y+2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do hệ (*) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm

Câu 6. (1,0 điểm) Tìm m, n nguyên dương để phương trình $x^2 - 2(m-n)x + 2m - 3n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Điều kiện : $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m-n)^2 - (2m-n) \geq 0(*)$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-n) \\ x_1 x_2 = 2m - 3n \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow 4(m-n)^2 - 2(2m-3n) = 10$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2(2n+1)m + 2n^2 + 3n - 5 = 0(**)$$

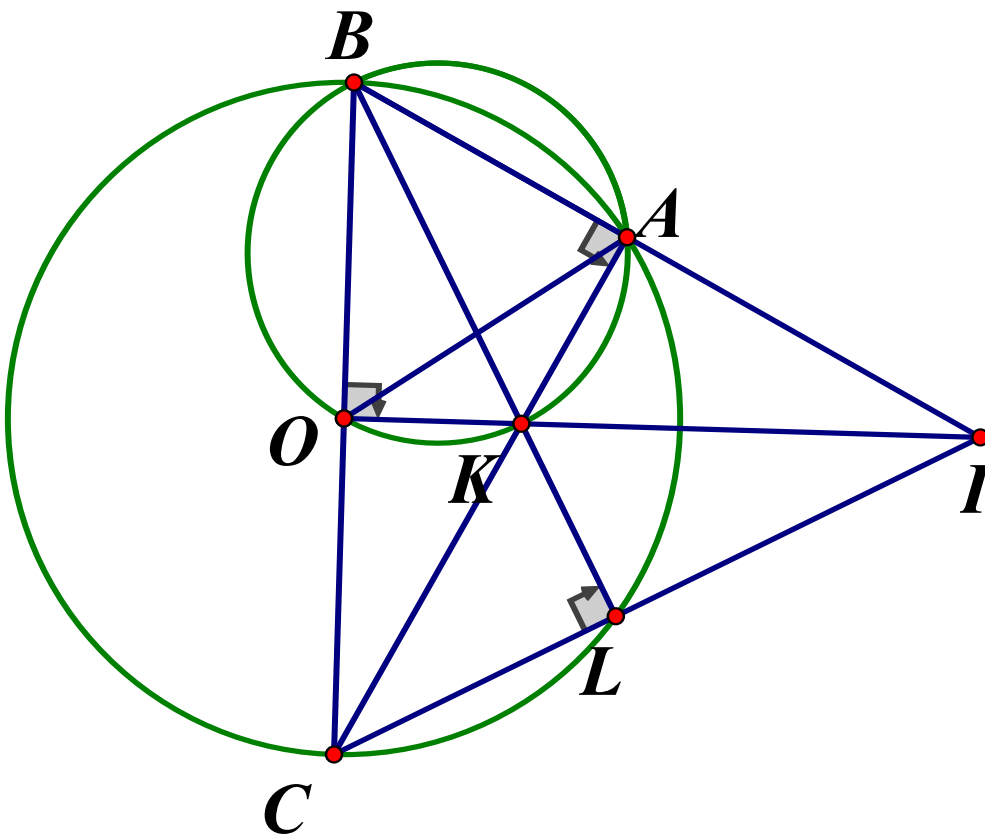
(**) có nghiệm khi $\Delta'_{(**)} = 11 - 2n$ là số chính phương

Do n nguyên dương nên tìm được $n = 1, n = 5$

$$\left[\begin{array}{l} n = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 0(ktm) \end{array} \right. \\ n = 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 6 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Kiểm tra điều kiện (*) ta có các giá trị m, n là $m = 3, n = 1; m = n = 5; m = 6, n = 5$

Câu 7. (1,0 điểm) Cho đường tròn (O) có đường kính BC , A là điểm nằm trên (O) ($AB < AC, A \neq B$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABO cắt đoạn thẳng AC tại điểm thứ hai là K . Đường thẳng BK cắt (O) tại điểm thứ hai là L . Các đường thẳng CL, OK cắt nhau tại I . Chứng minh ba điểm A, B, I thẳng hàng



Ta có $\angle BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $\angle BAK = 90^\circ$ nên $\angle BOK = 90^\circ$ ($OBAK$ là tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow OI \perp BC$

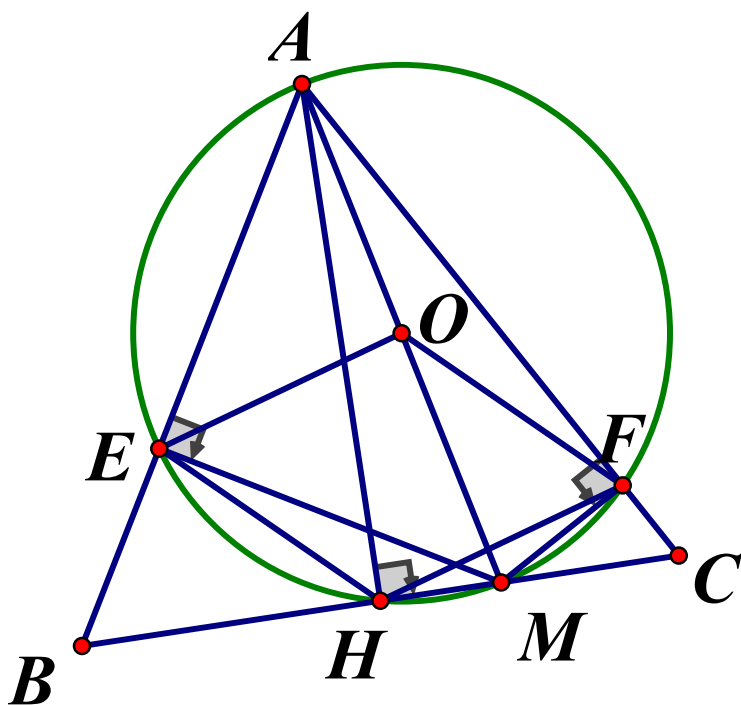
Ta lại có $\angle BLC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Suy ra $BL \perp CI$

Do đó K là trực tâm $\triangle IBC$. Suy ra $CK \perp BI$ (1)

Mặt khác, $\angle BAC = 90^\circ$ nên $CK \perp BA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BA, BI cùng nằm trên một đường thẳng hay ba điểm A, B, I thẳng hàng

Câu 8. (2,0 điểm) Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH ($H \in BC$), M là điểm bất kỳ trên cạnh BC , vẽ ME vuông góc với AB tại E và MF vuông góc với AC tại F . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AM



a) (1,0 điểm) Tứ giác $OEHF$ là hình gì

Do $\angle AHM = \angle AEM = \angle AFM = 90^\circ$ nên các điểm A, E, H, M, F nằm trên đường tròn đường kính AM mà O là trung điểm AM nên $OE = OF = \frac{AM}{2} = R$ (với R là bán kính đường tròn

đường kính AM). Suy ra $OE = OF = EH = EF = R$

Vậy tứ giác $OEHF$ là hình thoi

b) (1,0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $OEHF$ theo a khi M di động trên cạnh BC

Ta có $\angle EHF = 180^\circ - \angle EAF = 120^\circ$ suy ra EF là cạnh tam giác đều nội tiếp

$$\text{Do đó } S_{OEHF} = \frac{1}{2} OH \cdot EF = \frac{1}{2} R^2 \sqrt{3}$$

Khi đó S_{OEHF} nhỏ nhất khi R nhỏ nhất

$$\text{Mà } R = \frac{1}{2}AM \geq \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (dấu bằng xảy ra khi } M \equiv H)$$

$$\text{Suy ra } S_{OEHF} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{3}}{4} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{32}; S_{OEHF} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{32} \Leftrightarrow M \equiv H$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $OEHF$ bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{32}$

Câu 9. (1,0 điểm) Cho các số thực x, y thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Chứng minh $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x^3 + y^3 \leq 1$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq x^2 \\ y^3 \leq y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 = 1. (\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 1; y = 0 \end{cases})$$

$$\text{Mà } (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } (x+y)(x^3 + y^3) = x^4 + y^4 + xy(x^2 + y^2) \geq x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$