



**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC NINH**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
Năm học 2024-2025
Môn thi: Toán**

Lớp: 9 THCS
Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu I: (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right), (a, b > 0; a \neq b).$

2) Phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

Câu II: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3+1}) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$$

Câu III: (3,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a-b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $8c+1$ là số chính phương.

Câu IV: (6,0 điểm)

1) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') , trong đó E, F thuộc đường tròn (O') và điểm F nằm trong đường tròn (O) . Hai đường thẳng AE và AF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và $Q(P, Q$ khác $A)$. Tia EF cắt PQ tại K .

a) Chứng minh $BKPE$ là tứ giác nội tiếp. Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $IJE = IFM$.

c) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$.

2) Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Gọi M là điểm di động trên nửa đường tròn ($M \neq B; M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với $BC, (H \in BC)$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MCH và MBH . Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất.

Câu V: (3,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}.$$

2) Biết rằng mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.

.....**HẾT**.....



LỜI GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu I: (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right), (a, b > 0; a \neq b).$

2) Phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của biểu thức $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

Lời giải

1. Với $a, b > 0; a \neq b$, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{a}}$ với $a, b > 0; a \neq b$.

2. Vì phương trình $x^2 - 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 nên

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 - 5 = 0 \\ x_2^2 - 3x_2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 4 = 3x_1 + 1 \\ x_2^2 - 4 = 3x_2 + 1 \end{cases}$$

Đồng thời theo Viét có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -5 \end{cases}$. Từ đó

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2) &= (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4) = (3x_1 + 1)(3x_2 + 1) \\ &= 3(x_1 + x_2) + 9x_1x_2 + 1 \\ &= 3 \cdot 3 + 9 \cdot (-5) + 1 \\ &= -35. \end{aligned}$$

Vậy $g(x_1)g(x_2) = -35$.

Câu II: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} \end{cases}$$

Lời giải

1) Điều kiện $\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Xét phương trình $\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x} = 9x^2 - 36x + 38$ (1).

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có

$$VT_{(1)}^2 = (\sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x})^2 \leq 2(3x-5+7-3x) = 4 \Rightarrow VT_{(1)} \leq 2$$

Mặt khác $VP_{(1)} = 9x^2 - 36x + 38 = 9(x-2)^2 + 2 \geq 2$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow VT_{(1)} = VP_{(1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-5} = \sqrt{7-3x} \\ (x-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

2. Xét hệ (I)
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3} + 1) \quad (i) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) - 4 = 6\sqrt[3]{xy-x+1} \quad (ii) \end{cases}$$

Điều kiện $\begin{cases} y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} (*)$

Đầu tiên, ta thấy rằng $x = y = 0$ không thỏa mãn (i). Khi không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn (*) ta

$$\text{có } (i) \Leftrightarrow (\sqrt{x+y} - 2\sqrt{y}) + [x(x+y) - 2y^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-2y}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}} + (x-y)(x+2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}} + (x+2y) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}+2\sqrt{y}} + (x+2y) > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thay vào (ii) ta có

$$x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 = 3 \left[2\sqrt[3]{x^2 - x + 1} - (x+1) \right]$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 = 3 \frac{8(x^2 - x + 1) - (x+1)^3}{4\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + (x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 = 3 \cdot \frac{-(x^3 - 5x^2 + 11x - 7)}{4\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + (x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 5x^2 + 11x - 7) \left[1 + \frac{3}{4\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + (x+1)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 11x - 7 = 0 \text{ (Vì } x \geq 0 \text{ nên } \frac{3}{4\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + 2(x+1)\sqrt[3]{x^2 - x + 1} + (x+1)^2} > 0)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(x-2)^2 + 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ (TMĐK)} \Rightarrow y=1.$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 1)$.

Câu III: (3,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

2) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a - b$ là số nguyên tố và $3c^2 = ab + bc + ca$. Chứng minh rằng $8c + 1$ là số chính phương.

Lời giải

1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn: $x^2 = 9y^2 + 6y + 16$.

$$x^2 = 9y^2 + 6y + 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (3y+1)^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow (x+3y+1)(x-3y-1) = 15(*)$$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{N} \text{ nên } \begin{cases} x+3y+1, x-3y-1 \in \mathbb{Z} \\ x+3y+1 \geq 1 \\ (x+3y+1) - (x-3y-1) = 6y+2 \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó từ } (*) \text{ suy ra } \begin{cases} x+3y+1=15 \\ x-3y-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+3y+1=5 \\ x-3y-1=3 \end{cases}$$

$$\text{- Với } \begin{cases} x+3y+1=15 \\ x-3y-1=1 \end{cases}, \text{ giải ra được } x=8 \text{ và } y=2 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{- Với } \begin{cases} x+3y+1=5 \\ x-3y-1=3 \end{cases}, \text{ giải ra được } x=4 \text{ và } y=0 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu là $(x; y) \in \{(8; 2), (4; 0)\}$.

2. Ta có

$$3c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow 4c^2 = ab + bc + ca + c^2 \Leftrightarrow (2c)^2 = (a+c)(b+c)(**)$$

Gọi $(a+c, b+c) = d$. Khi đó $a-b = (a+c) - (b+c) : d$, mà $a-b$ là số nguyên tố nên $d=1$ hoặc $d=a-b$.

$$\text{- Nếu } d=1 \text{ thì từ } (*) \text{ suy ra } \begin{cases} a+c=x^2 \\ b+c=y^2 \end{cases} \text{ (} x, y \in \mathbb{N}^*; xy=2c; x>y \text{)}. \text{ Lúc này}$$

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = a-b \text{ là số nguyên tố} \Rightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a-b+1}{2} \\ y = \frac{a-b-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } 2c = xy = \frac{a-b+1}{2} \cdot \frac{a-b-1}{2} = \frac{(a-b)^2 - 1}{4} \Rightarrow 8c+1 = (a-b)^2 \text{ là số chính phương.}$$

- Nếu $d = a - b$ thì từ (**) suy ra $\begin{cases} a + c = (a - b)x^2 \\ b + c = (a - b)y^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{N}^*; (a - b)xy = 2c; x > y).$

Lúc này

$$\begin{aligned} (a + c) - (b + c) &= (a - b)(x^2 - y^2) \Leftrightarrow a - b = (a - b)(x^2 - y^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \quad (\text{do } a - b > 0) \\ &\Leftrightarrow (x + y)(x - y) = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1; y = 0 \Rightarrow b + c = 0 \quad (\text{loại}). \end{aligned}$$

Vậy $8c + 1$ là số chính phương.

Câu IV: (6,0 điểm)

1) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Trên tia đối của tia AB lấy điểm M kẻ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O') , trong đó E, F thuộc đường tròn (O') và điểm F nằm trong đường tròn (O) . Hai đường thẳng AE và AF cắt đường tròn (O) lần lượt tại P và Q (P, Q khác A). Tia EF cắt PQ tại K .

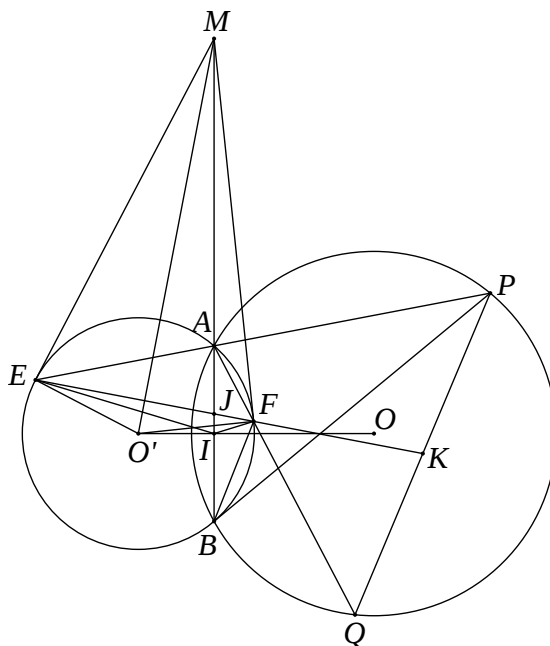
a) Chứng minh $BKPE$ là tứ giác nội tiếp. Gọi I và J lần lượt là giao điểm của AB với OO' và EF . Chứng minh $IJE = IFM$.

c) Chứng minh $PQ = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}$.

2) Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$. Gọi M là điểm di động trên nửa đường tròn ($M \neq B; M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$). Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác MCH và MBH . Xác định vị trí điểm M để chu vi tam giác O_1HO_2 lớn nhất.

Lời giải

1) Ta có hình vẽ



a) Xét đường tròn (O) có $BPQ = BAQ$ (cùng chắn cung BQ) hay $EPB = BAF$ (1).

Xét đường tròn (O') có $BEF = BAF$ (cùng chắn cung BF) hay $BEK = BAF$ (2).

b) Do (O) và (O') cắt nhau tại A và B nên $OO' \perp AB$ và do ME, MF là các tiếp tuyến tại E, F của (O') nên $O'E \perp ME$ và $O'F \perp MF$. Từ đó ta có $\widehat{MIO'} = \widehat{MEO'} = \widehat{MFO'} = 90^\circ$.

Trong đường tròn này, ta có

$$IEF = IMF \text{ (cùng chẵn } IF) \Rightarrow IEJ = IMF$$

$$EIM = FIM \text{ (chấn hai cùng } ME = MF \text{)} \Rightarrow EIJ = MIF$$

Từ đây suy ra $\Delta EIJ \sim \Delta MIF$ (g.g) $\Rightarrow IJE = IFM$.

c) Vì các tứ giác $ABQP$ và $BKPE$ là nội tiếp nên

$$\begin{cases} AEB = BQP = BQK \\ AEB = BKQ \end{cases} \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle QKB (\text{g} \cdot \text{g}) \Rightarrow \frac{AB}{QB} = \frac{AE}{QK}$$

Do các tứ giác $ABQP$ và $AEBF$ nội tiếp nên $PBQ = PAQ = EBF \left(\text{*}_1 \right)$.

Xét đường tròn (O') , lại có $EBF = EFM \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} EAF \right) (*_2)$.

Do tứ giác $EIFM$ nội tiếp nên $EFM = EIM = EIA(*_3)$.

Từ $\left(\begin{smallmatrix} * \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} * \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} * \\ 3 \end{smallmatrix} \right)$ suy ra $PBQ = EIA$. Kết hợp với $BQP = EAI$ theo chứng minh ở trên, suy ra

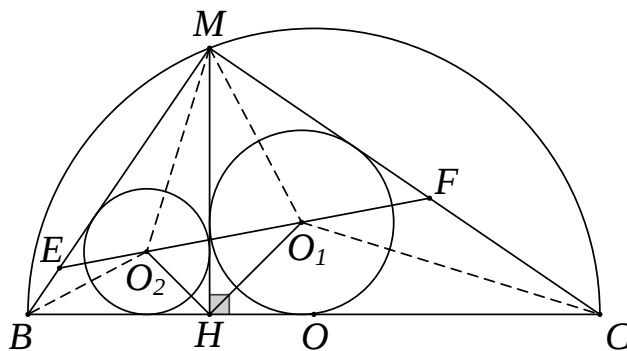
$$\Delta EIA \sim \Delta PBQ \text{ (g.g.)} \Rightarrow \frac{AI}{OB} = \frac{AE}{OP} \Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{2AE}{OP} \quad (4) \text{ (do } AB = 2AI \text{)}.$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{AE}{OK} = \frac{2AE}{OP} \Rightarrow QP = 2QK \Rightarrow K$ là trung điểm của $PQ \Rightarrow OK \perp PQ$.

Từ đó, theo Pytago, ta có

$$PQ = 2PK = 2\sqrt{OP^2 - OK^2} = 2\sqrt{OA^2 - OK^2}.$$

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của O_1O_2 với MB và MC .



Để thấy $\Delta MHO_1 \sim \Delta BHO_2$ (g-g), suy ra $\frac{HO_1}{HO_2} = \frac{MH}{BH} = \tan MBH = \tan MBC = \frac{MC}{MB}$

Do HO_1 và HO_2 là hai tia phân giác của hai góc kề bù nên $HO_1 \perp HO_2 \Rightarrow O_1HO_2 = 90^\circ$.

Từ những điều trên, suy ra

$$\Delta O_1HO_2 \sim \Delta CMB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \begin{cases} O_2O_1H = MCB \\ O_1O_2H = MBC \end{cases}$$

Từ đó ta có các tứ giác O_1FCH và O_2EBH nội tiếp, dẫn tới $\begin{cases} MFO_1 = O_1HC = 45^\circ \\ MEO_2 = O_2HB = 45^\circ \end{cases}$.

Đến đây, dễ dàng chứng minh được

$$\Delta MO_1F = \Delta MO_1H \text{ (g.c.g)} \Rightarrow O_1F = O_1H$$

$$\Delta MO_2E = \Delta MO_2H \text{ (g.c.g)} \Rightarrow O_2E = O_2H$$

Từ đó, ta có chu vi ΔO_1HO_2 là $O_1H + O_1O_2 + O_2H = O_2E + O_1O_2 + O_1F = EF$.

Xét ΔMEF vuông cân tại M ($MEF = MFE = 45^\circ$), ta có

$$EF^2 = 2ME^2 = 2MH^2 \text{ (do } ME = MH \text{ vì } \Delta MO_2E = \Delta MO_2H) \text{ nên } EF = MH\sqrt{2}.$$

Như vậy, EF lớn nhất $\Leftrightarrow MH$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Đó chính là vị trí cần tìm của điểm M .

Câu V: (3,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}.$$

2) Biết rằng mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.

Lời giải

1) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c}.$$

Từ $ab + bc + ca = 1$ suy ra

$$1 = ab + c(a+b) \geq ab + 2c\sqrt{ab}$$

$$1 + c^2 \geq (\sqrt{ab} + c)^2$$

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{1+c^2} - c$$

$$ab \leq 1 + 2c^2 - 2c\sqrt{1+c^2}.$$

Theo Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) = \frac{2(1+ab)}{1+c^2}$$

Kết hợp đánh giá ở trên, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} \right)^2 \leq \frac{2(1+1+2c^2-2c\sqrt{1+c^2})}{1+c^2} = 4 \left(1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \right)$$

Từ đó, ta có

$$M \leq 2\sqrt{1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} - \frac{9\sqrt{c^2+1}}{8c} = T$$

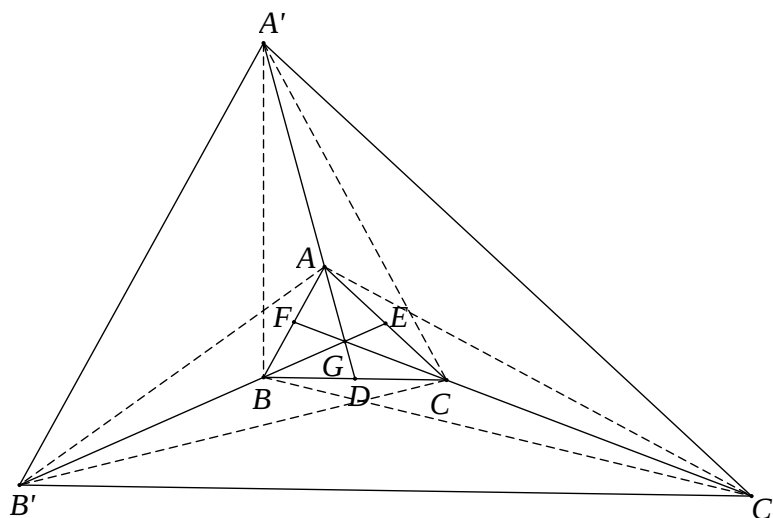
Đặt $\sqrt{1 - \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}} = t (0 < t < 1)$ thì $T = 2t - \frac{9}{8(1-t^2)}$. Ta có

$$T + \frac{1}{2} = 2t - \frac{9}{8(1-t^2)} + \frac{1}{2} = \frac{-(2t-1)^2(4t+5)}{8(1-t^2)} \leq 0 \Rightarrow T \leq -\frac{1}{2}.$$

Suy ra $M \leq -\frac{1}{2}$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{\sqrt{7}}$ và $c = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là $-\frac{1}{2}$, đạt được tại $a = b = \frac{1}{\sqrt{7}}$ và $c = \frac{3}{\sqrt{7}}$.

2) Biết rằng mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.



Xét 5 điểm bất kì trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 5 điểm này tồn tại ba điểm được tô cùng một màu.

Không mất tính tổng quát, giả sử ba điểm đó là A, B, C và chúng được tô màu đỏ.

Gọi AD, BE, CF là 3 đường trung tuyến và G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Khi đó, nếu G được tô màu đỏ thì ta có điều phải chứng minh.

Ngược lại, nếu G được tô màu xanh thì trên tia đối của các tia AG, BG, CG lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $A'A = 2AD, B'B = 2BE$ và $C'C = 2CF$. Khi đó, A, B, C lần lượt là trọng tâm của các tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ và G là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$. Lúc này



- Nếu 3 điểm A', B', C' đều tô màu xanh thì $\Delta A'B'C'$ có ba đỉnh A', B', C' và trọng tâm G cùng tô màu xanh và ta có điều phải chứng minh.
- Nếu trong ba điểm A', B', C' tồn tại một điểm tô màu đỏ, giả sử điểm đó là A' . Khi đó, $\Delta A'BC$ có ba đỉnh A', B, C và trọng tâm A cùng tô màu đỏ và ta cũng có điều phải chứng minh.

Vậy tồn tại một tam giác mà có ba đỉnh và trọng tâm của nó cùng màu.

