

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + 1} \quad \text{với mọi số nguyên dương } n.$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Câu 2. (5 điểm) Cho số thực q . Biết rằng tồn tại một cấp số cộng (a_n) có công sai là số thực dương sao cho: với mỗi số nguyên dương k thì q^k là một số hạng của dãy (a_n) . Chứng minh rằng q là số nguyên.

Câu 3. (6 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với $AB < AC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . D là tiếp điểm của BC và (I) . M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB .

(a) Đường thẳng qua D song song với AI , cắt MI tại S . Chứng minh rằng $SA = DI$.

(b) Lấy X, Y theo thứ tự thuộc MN, MP sao cho XP, YN là các tiếp tuyến của (I) . Chứng minh rằng XY vuông góc với IG .

Câu 4. (4 điểm) Có 2020 tấm thẻ đỏ và 2020 tấm thẻ xanh, trên mỗi tấm thẻ có ghi một số nguyên dương không vượt quá 2020 (hai số ghi trên hai tấm thẻ bất kì không nhất thiết phải khác nhau). Chứng minh rằng ta có thể chọn ra một bộ thẻ đỏ và một bộ thẻ xanh sao cho: tổng các số được ghi trên mỗi bộ thẻ bằng nhau.

(Nếu trong bộ chỉ có một tấm thẻ thì tổng các số ghi trên các tấm thẻ của bộ đó là số trên chính tấm thẻ ấy.)

.....**HẾT**.....

Học sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Câu 1. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = 2xf(x^2) \quad \text{với mọi } x \in [0; 1].$$

Câu 2. (6 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ và

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì $(x_n^2 - 1)^2 + 1$ là hợp số.

(b) Cho k là một số nguyên dương và p là một ước nguyên tố của x_{2^k} . Chứng minh rằng nếu $p - 1$ chia hết cho 4 thì $p - 1$ chia hết cho 2^{k+2} .

Câu 3. (5 điểm) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, OA . D là một điểm thuộc đoạn thẳng MC (D khác M, C). E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD . G là giao điểm của đường thẳng qua E song song với AB và đường thẳng qua F song song với AC . I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác GEF . Chứng minh rằng $NI = NM$.

Câu 4. (4 điểm) Một hội nghị có n người tham dự ($n \geq 5$). Biết rằng tồn tại một số nguyên dương m sao cho: trong $n - 2$ người bất kì tham dự hội nghị, luôn có đúng 3^m cặp quen biết nhau. Tìm tất cả các giá trị có thể của n .

.....**HẾT**.....

Học sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm.