

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TỈNH QUẢNG NAM**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỶ THI TUYỂN SINH 10 THPT CHUYÊN**

**Năm học 2020 – 2021**

**Môn thi: TOÁN CHUYÊN**

**Thời gian: 150 phút**

**Khóa thi ngày 23 – 25/07/2020**

**Câu 1. (2,0 điểm)**

a) Cho biểu thức  $A = \frac{2}{1 + \sqrt{x + 4\sqrt{x} + 4}} + \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{18}{x - 9} \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{pmatrix}$

Rút gọn biểu thức  $A$

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  thỏa mãn  $3^n - 8$  là lập phương của một số tự nhiên

**Câu 2. (1,0 điểm)**

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2x + 3$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  biết rằng đường thẳng  $(d'): y = 4x + m$  cắt đường thẳng  $(d)$  tại điểm có hoành độ dương thuộc  $(P)$

**Câu 3. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình :  $(\sqrt{2-x} + 1)^2 = 3x + 1$

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x = 5 \\ x^2y + xy^2 + y^2 + 5x + xy + 5y = 2 \end{cases}$$

**Câu 4. (2,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  ( $AB < BC$ ),  $M$  là trung điểm của  $AC$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABM$

a) Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $OG \perp BM$

b) Lấy điểm  $N$  trên  $BC$  sao cho  $BN = BA$ . Vẽ  $NK$  vuông góc với  $AB$  tại  $K$ ,  $BE$  vuông góc với  $AC$  tại  $E$ ,  $KF$  vuông góc với  $BC$  tại  $F$ . Tính tỉ số  $\frac{BE}{KF}$

**Câu 5. (2,0 điểm)**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ), có ba đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $H$ . Vẽ đường tròn  $(O)$  đường kính  $BC$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $E$  cắt  $AD$  tại  $K$

a) Chứng minh  $KA = KE$

b) Vẽ tiếp tuyến  $AM$  của đường tròn  $(O)$ ,  $M$  là tiếp điểm. Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $HDM$ . Chứng minh  $O, I, M$  thẳng hàng

**Câu 6. (1,0 điểm)**

Cho ba số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $H = 3xy + yz^2 + zx^2 - x^2y$

## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{2}{1 + \sqrt{x + 4\sqrt{x} + 4}} + \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{18}{x - 9} \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{(\sqrt{x} + 2)^2}} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{18}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{18}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x} - 6 + x + 3\sqrt{x} - 18}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x + 5\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 8)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 3} \end{aligned}$$

b) Giả sử  $3^n - 8 = a^3 (a \in \mathbb{Z})$

$$\text{Suy ra } 3^n = a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4) \quad (1)$$

Vì  $a \in \mathbb{Z}$  nên  $a + 2 > 1$ . Suy ra  $a + 2 = 3k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = 3k - 2$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } 3^n = k(9k^2 - 18k + 12) = 3k(3k^2 - 6k + 4)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} k \vdots 3 \\ k = 1 \\ 3k^2 - 6k + 4 \vdots 3 \text{ (Voly)} \\ 3k^2 - 6k + 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \vdots 3 \\ k = 1 \\ 3k^2 - 6k + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Suy ra  $a = 1$ . Thay vào (1) ta được  $n = 2$

**Câu 2.** Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là :

$$x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

Gọi  $A, B$  lần lượt là giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là  $A(-1;1), B(3;9)$

Yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow B(3;9) \in (d): y = 4x + m$

$$\Rightarrow 9 = 4.3 + m \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy  $m = -3$  là giá trị cần tìm

**Câu 3.**

$$a) (\sqrt{2-x} + 1)^2 = 3x + 1 \left( -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 - x + 2\sqrt{2-x} + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = 4x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x - 1 \left( x \geq \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 2 - x = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = -\frac{1}{4}(ktm) \end{cases}$$

Vậy  $S = \{1\}$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x = 5 \\ x^2y + xy^2 + 5x + xy + 5y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = xy + y + 5 \\ xy(x+y) + y(x+y) + 5(x+y) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = xy + y + 5 \\ (xy + y + 5)(x+y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = xy + y + 5 \\ [(x+y)^2 + (x+y)](x+y) = 2 \end{cases}$$

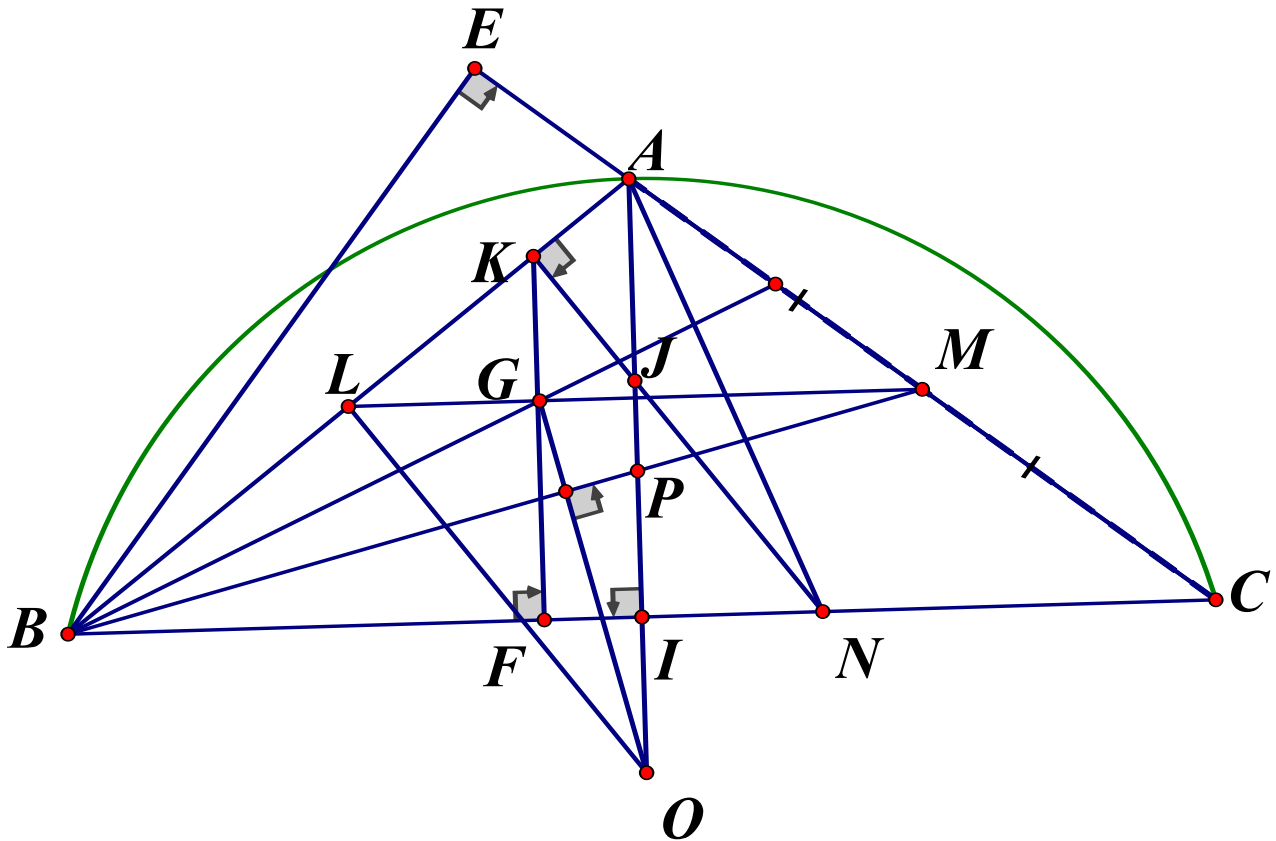
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = xy + y + 5 \\ (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + (x+y) = xy + y + 5 \\ x+y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ xy+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ (1-y)y+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ -y^2+2y+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ y=-1 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=-1 \\ x=-2; y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm  $(x; y) \in \{(2; -1); (-2; 3)\}$

**Câu 4.**



a) Gọi L là trung điểm của  $AB$ .  $ML$  cắt  $AO$  tại  $J$

Xét  $\triangle OLJ$  và  $\triangle BAI$  có:  $\angle JL = \angle BIA = 90^\circ$ ,  $\angle LOJ = \angle ABI = \frac{1}{2} \text{sd } \angle AOB$

$\Rightarrow \triangle OLJ \cong \triangle BAI (g.g)$  (1)

Tam giác  $ABM$  có  $G$  là trọng tâm nên  $LG = \frac{1}{3}LM = \frac{2}{3}LJ$  (2)

Gọi  $P$  là giao điểm của  $BM$  và  $OA$ . Ta có  $P$  là trọng tâm  $\triangle ABC \Rightarrow AP = \frac{2}{3}AI$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \triangle OGI \cong \triangle BPI \Rightarrow \widehat{PBI} = \widehat{HBI} = \widehat{GOJ} = \widehat{HOI}$

$\Rightarrow \widehat{HBI} = \widehat{HOI} \Rightarrow BHIO$  là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BHO} = \widehat{BIO} = 90^\circ \Rightarrow OG \perp BM$  (đpcm)

b) Ta có  $\triangle BEC$  vuông tại  $E \Rightarrow \sin \widehat{C} = \frac{BE}{BC}$

$\triangle BKF$  vuông tại  $F \Rightarrow \sin \widehat{FBK} = \frac{KF}{BK}$

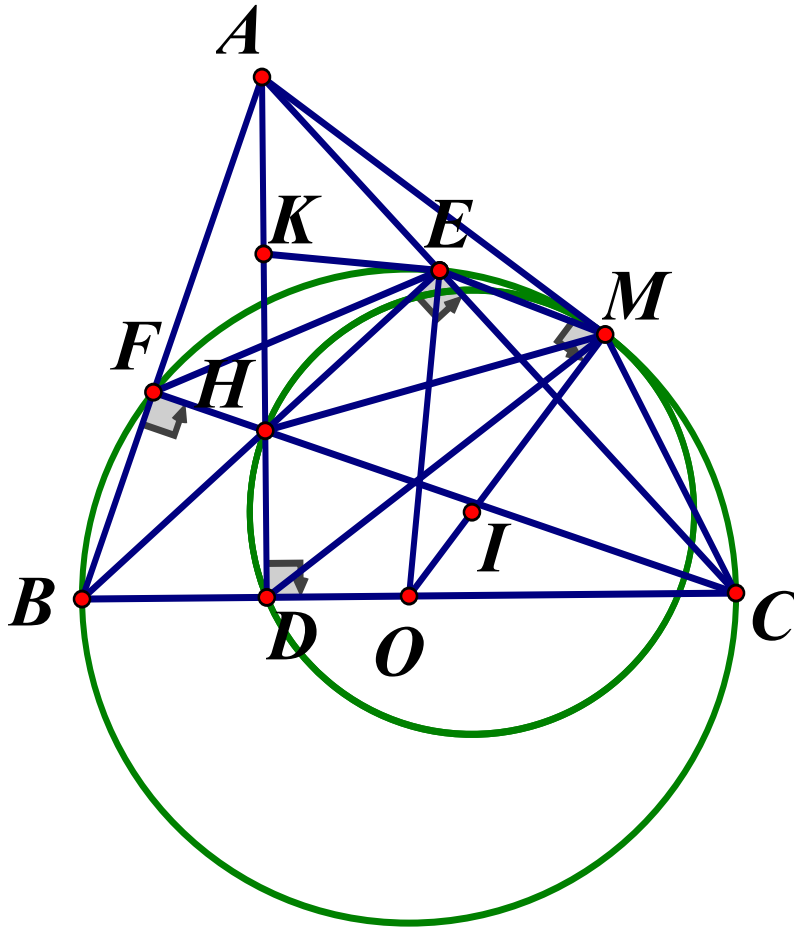
Mà tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nên  $\widehat{C} = \widehat{FBK} \Rightarrow \frac{BF}{BC} = \frac{KF}{BK} \Rightarrow \frac{BE}{KF} = \frac{BC}{BK}$  (\*)

Mặt khác  $\triangle BAN$  cân tại  $B$  vì  $BA = BN$  (gt), có  $NK, AI$  là 2 đường cao ứng với hai cạnh bên nên  $NK = AI$

Chứng minh được  $\triangle BKN = \triangle BIA \Rightarrow BK = BI$

Thay vào (\*) ta được  $\frac{BE}{KF} = \frac{BC}{BI} = 2$

**Câu 5.**



a) Chứng minh được  $AEHF$  nội tiếp  $\Rightarrow \angle AHE = \angle AFE$

Mà  $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ACB$  (cùng bù với  $\sphericalangle BFE$ )

$\square ACB = \square HEK$  (cùng chắn  $BE$ )

$$\square KHE = \square HEK \Rightarrow \Delta KHE \text{ cân tại K} \Rightarrow KH = KH (1)$$

Mặt khác  $\begin{cases} \widehat{KHE} + \widehat{KAE} = 90^0 \\ \widehat{HEK} + \widehat{KEA} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{KAE} = \widehat{KEA}$

Suy ra tam giác  $AKE$  cân tại K nên  $KA = KE$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $KA = KE(dfcm)$

b) Dễ dàng chứng minh được

$$\Delta AHE \sim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH \cdot AD = AC \cdot AE \quad (3)$$

Xét  $\Delta AEM$  và  $\Delta AMC$  có:  $\widehat{EAM} = \widehat{CAM}$  chung;  $\widehat{AME} = \widehat{ACM}$  (cùng chắn  $ME$ )

$$\Rightarrow \Delta AEM \sim \Delta AMC (g - g) \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AM^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow AH \cdot AD = AM^2 \Leftrightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$$

Xét  $\Delta AHM$  và  $\Delta AMD$  có:  $\widehat{HAM} = \widehat{DAM}$  chung;  $\frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AD}$

$$\Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta AMD (c.g.c) \Rightarrow \widehat{HDM} = \widehat{AMH} \quad (5)$$

Gọi  $Mx$  là tiếp tuyến của  $(I)$  có:  $\widehat{HDM} = \widehat{HMx} \quad (6)$

Từ (5) và (6) suy ra  $Mx \equiv MA \Rightarrow IM \perp AM$  mà  $OM \perp AM$  (gt)

Nên  $O, I, M$  thẳng hàng (đpcm)

**Câu 6.** Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < x \leq y \leq z$ . Ta có:

$$(y - z)(y - x) \leq 0 \Leftrightarrow y^2 - xy - zy + xz \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + xz \leq xy + zy \Leftrightarrow y^2z + x^2z \leq xyz + x^2y$$

$$\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y \leq xyz + x^2y + z^2y = y(2xz + x^2 + z^2) - xyz$$

$$\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y \leq y(x + z)^2 - xyz = \frac{1}{2} \cdot 2y(x + z)(x + z) - xyz$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{27} (2x + 2y + 2z)^3 - xyz = 4 - xyz$$

$$\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leq 4$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} H &= 3xy + yz^2 + zx^2 - x^2y = (x + y + z)xy + yz^2 + zx^2 - x^2y \\ &= x^2z + y^2x + z^2y + xyz \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả trên ta được:  $H \leq 4$

Vậy  $\text{Max } H = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1$