

Câu I. (3,5 điểm)

1) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh

rằng : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \right) = \sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \\ 3x + 2y + 1 = 2\sqrt{2x + y + 6} \end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức :

$$(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4$$

2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} c \leq b < a \leq 3; b^2 + 2a \leq 10; b^2 + 2a + 2c \leq 14 \\ (a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab \leq 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b \end{cases}.$$
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 4a^4 + b^4 + 2b^2 + 4c^2$$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Điểm P nằm trong tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, CB . Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K)

1) Chứng minh rằng AP vuông góc với BC

2) Chứng minh rằng $AP = 2OK$

3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn tại hai điểm Q, R .

Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle KQR$

Câu IV. (1 điểm)

Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn $A_k A_{k+1}$ bằng k (đơn vị dài), với $k = 1, 2, \dots, 29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1 A_2, \dots, A_{29} A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu, ta luôn chọn được hai số nguyên dương $1 \leq j \leq i \leq 29$ sao cho hai đoạn $A_i A_{i+1}$ và $A_j A_{j+1}$ được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.

ĐÁP ÁN

Câu I. (3,5 điểm)

1) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng

minh rằng : $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+bc} + \frac{1}{b+ca} + \frac{1}{c+ab} \right) = \sqrt{\frac{abc}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$

Từ giả thiết suy ra $ab+bc+ca=abc$. Ta có :

$$\frac{1}{a+bc} = \frac{a^2}{a^2+abc} = \frac{a}{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{b+ca} = \frac{b}{(b+c)(b+a)}$; $\frac{1}{c+ab} = \frac{c}{(c+a)(c+b)}$. Từ đó suy ra

$$VT = \frac{a(b+c)+b(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (1), \text{ Và :}$$

$$VP = \sqrt{\frac{(abc)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}} = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (do a, b, c > 0) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \\ 3x + 2y + 1 = 2\sqrt{2x + y + 6} \end{cases}$$

Điều kiện : $2x + y + 6 \geq 0$. Nhân 4 vào phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$$4(2x^2 + 3xy + y^2) - 24 = 0$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geq 0 \\ (3x + 2y + 1)^2 - 4(2x + y + 6) = 0 \end{cases} \cdot \text{Ta viết lại thành hệ mới :}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geq 0 \quad (1) \\ 4(2x^2 + 3xy + y^2) - 24 = 0 \quad (2) \\ (3x + 2y + 1)^2 - 4(2x + y + 6) = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Lấy phương trình (3) trừ đi phương trình (2), vế với vế, ta thu được :

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3xy + y^2 = 6 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (1; 1)$

Câu II. (2,5 điểm)**1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức :**

$$(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4$$

Ta biến đổi như sau :

$$(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(5x+y)^3 = xy^3(x+y-1)$$

Vì x, y là hai số nguyên dương nên $x+y > 1$. Do đó, ta suy ra : $(5x+y)^3 = xy^3$ Do đó, ta suy ra x cũng là lập phương của một số nguyên dương. Đặt $x = z^3$, ta có:

$$(5z^3 + y)^3 = (zy)^3 \Leftrightarrow 5z^3 + y = zy \Leftrightarrow y(z-1) = 5z^3$$

Nếu $z=1$ (ktm). Xét $z \neq 1$. Khi đó, ta có $5z^3 : (z-1)$. Vì $5z^3 \equiv 5 \pmod{z-1} \Rightarrow 5 : z-1$ Từ đây ta tìm được $z \in \{2; 6\}$. Suy ra :

$$(z; y) \in \{(2; 40); (6; 216)\} \Rightarrow (x; y) \in \{(8; 40); (216; 216)\}$$

2) Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} c \leq b < a \leq 3; b^2 + 2a \leq 10; b^2 + 2a + 2c \leq 14 \\ (a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab \leq 2a^3 + 2b^3 + 2a + 2b \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 4a^4 + b^4 + 2b^2 + 4c^2$

Ta có :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) + 4ab - 2a(a^2 + 1) - 2b(b^2 + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 1 - 2b)(b^2 + 1 - 2a) \leq 0 \Leftrightarrow b^2 + 1 \leq 2a$$

Ta có : $P = (2a)^2 + (b^2 + 1)^2 + (2c)^2 - 1$. Do đó :

$$P - 76 = (2a - 6)(2a + 6) + (b^2 - 4)(b^2 + 6) + (2c - 4)(2c + 4)$$

$$= (2a - b^2)(2a - 6) + (b^2 - 2c + 2)(2a + b^2 - 10) + (2c + 4)(2a + 2c + b^2 - 14) \leq 0$$

Do đó $P \leq 76$. Vậy $\text{Max } P = 76 \Leftrightarrow (a, b, c) = (3, 2, 2)$ **Câu III. (3 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Điểm P nằm trong tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh CA, CB . Giả sử tứ giác $BCEF$ nội tiếp trong đường tròn (K)

**3) Đường thẳng qua P vuông góc với AP cắt đường tròn tại hai điểm Q, R .
Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp ΔKQR**

Gọi G đối xứng với P qua J

Ta có $\angle AJP = 90^\circ$ dẫn đến $AG = AP$ hay G thuộc $(A; AP)$

Ta có K là trung điểm của PX do đó

$PX.PJ = 2PK.PJ = PK.2PJ = PK.PG = PQ.PR$ (do tứ giác JRXQ nội tiếp (O))

Suy ra $G \in (KQR)$

Câu IV. (1 điểm)

Cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn $A_k A_{k+1}$ bằng k (đơn vị dài), với $k = 1, 2, \dots, 29$. Ta tô màu mỗi đoạn thẳng $A_1 A_2, \dots, A_{29} A_{30}$ bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu).

Chứng minh rằng với mọi cách tô màu,, ta luôn chọn được hai số nguyên dương $1 \leq j \leq i \leq 29$ sao cho hai đoạn $A_i A_{i+1}$ và $A_j A_{j+1}$ được tô cùng màu và $i - j$ là bình phương của số nguyên dương.

Gọi d_i là màu $A_i A_{i+1}; i = 1, \dots, 29, d_i \in \{1; 2; 3\}$

Phản chứng $d_i \neq d_j \forall |i - j|$ là số chính phương

$$d_i \neq d_{i+9}, d_i \neq d_{i+16} \neq d_{i+25}; d_{i+9} \neq d_{i+25}; d_{i+16} \neq d_{i+25}$$

Mà trong $d_i; d_{i+9}, d_{i+16}; d_{i+25}$ có hai số bằng nhau, nên $d_{i+9} = d_{i+16}, \forall i \geq 1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $d_1 = 1, d_2 = 2$; Có $d_{10} \neq d_1 = 1$.

- Nếu $d_{10} = 3 = d_{i+9} \Rightarrow d_{17} = d_{i+16} = d_{1+9} = d_{10} = 3$

$$d_{26} \neq d_{17} = 3; d_{26} \neq d_1 \Rightarrow d_{26} = 2$$

$$d_{11} \neq d_{10} = 3; d_{11} \neq d_2 = 2 \Rightarrow d_{11} = 1$$

$$d_{27} \neq d_{26} = 2, d_{27} \neq d_{11} = 1 \Rightarrow d_{27} = 3 \Rightarrow d_{20} = 3$$

$$d_{26} = 2 \Rightarrow d_{19} = 2, d_{20} = 3 \Rightarrow d_{13} = 3$$

Suy ra $d_3 = d_{17}$ (mâu thuẫn)

- Nếu $d_{10} = 2 \Rightarrow d_{24} = d_{17} = d_{10} = 2$

$$d_{26} \neq d_{17} = 2, d_{26} \neq d_1 = 1 \Rightarrow d_{26} = 3 = d_{19} = d_{12}$$

Suy ra $d_{11} = 1$ do $d_{11} \neq d_{12} = 3; d_{11} \neq d_{10} = 2 \Rightarrow d_{25} = d_{18} = d_{11} = 1$

$$d_3 \neq d_{12}, d_3 \neq d_2 \Rightarrow d_3 = 1 \Rightarrow d_{28} \neq d_3 = 1, d_{28} \neq d_{29} = 2 \Rightarrow d_{28} = 3$$

$\Rightarrow d_{28} = d_{29} = d_{17} = d_{10} = 3$ nhưng do $d_{10} = 2$, ta có điều mâu thuẫn

Vậy tồn tại i, j sao cho $|i - j|$ là số chính phương và $d_i = d_j$