

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^{2025}}{2024} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

b) Tìm số M nhỏ nhất sao cho $\frac{x_1^{2024}}{x_2} + \frac{x_2^{2024}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2024}}{x_{n+1}} < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y) - 2yf(x) = f(f(x)) + f(-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có các góc nhọn. Lấy điểm D bên trong tam giác sao cho $DAB = DCB$ và $DAC = DBC$. Gọi A' là giao điểm của AD với BC ; B' là giao điểm của BD với AC và C' là giao điểm của CD với AB .

a) Chứng minh rằng D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

b) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B, C lên các đường thẳng $B'C', C'A'$ và $A'B'$. Chứng minh rằng $p(ABC) \cdot p(A_1B_1C_1) \geq [p(A'B'C')]^2$, trong đó $p(XYZ)$ là kí hiệu chu vi của tam giác XYZ .

Câu 4 (5,0 điểm). Cho $3n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{3n} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ nằm trên mặt phẳng sao cho $A_1A_2A_3$ là tam giác đều và $A_{3k+1}, A_{3k+2}, A_{3k+3}$ là các trung điểm ba cạnh của tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}$, với mọi $k = \overline{1, n-1}$. Tô màu các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{3n}$ bởi một trong hai màu xanh và đỏ.

a) Khi $3n = 2025$, chứng minh rằng luôn tìm được 6328 hình thang cân mà tất cả các đỉnh của chúng đều cùng một màu và mỗi hình thang cân đó có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.

b) Tìm giá trị n nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{3n}$ bởi một trong hai màu xanh và đỏ, luôn tìm được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.

YÊU CẦU CHUNG

* Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi bài. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.

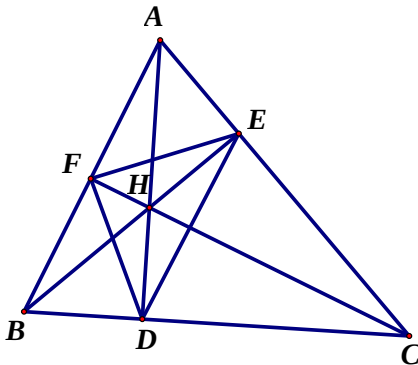
* Trong mỗi bài, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan. Ở câu hình, nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì cho điểm 0.

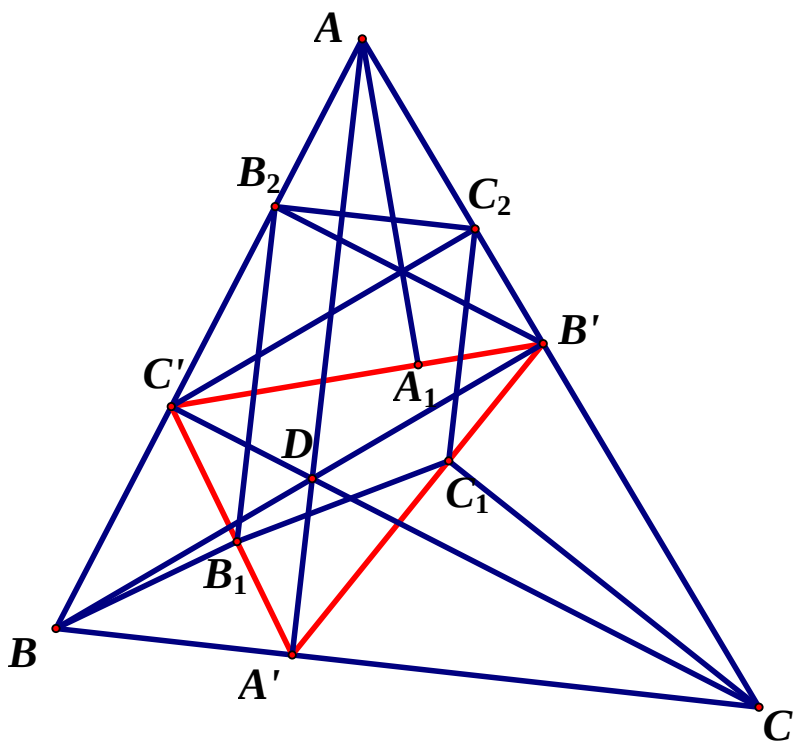
* Điểm thành phần của mỗi bài nói chung phân chia đến 0,5 điểm. Đối với điểm thành phần lớn hơn 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,5 điểm.

* Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm của từng bài.

* Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các bài.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a (2,0 điểm).	Dễ thấy, $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^{2025}}{2024} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng ngặt.	1,0
	Giả sử, dãy (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại $\lim x_n = x, x > x_1 = 8$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức $x_{n+1} = \frac{x_n^{2025}}{2024} + x_n \Rightarrow x = 0$. Mâu thuẫn! Vậy $\lim x_n = +\infty$.	1,0
Câu 1b (3,0 điểm).	Ta có: $\frac{x_i^{2024}}{x_{i+1}} = \frac{x_i^{2025}}{2014} \cdot \frac{2024}{x_i \cdot x_{i+1}} = \frac{2024(x_{i+1} - x_i)}{x_i \cdot x_{i+1}} = 2024\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right), \forall i \in \mathbb{N}^*$.	0,5
	Suy ra: $\frac{x_1^{2024}}{x_2} + \frac{x_2^{2024}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2024}}{x_{n+1}} = 2024\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5
	Đặt $a_n = \frac{x_1^{2024}}{x_2} + \frac{x_2^{2024}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2024}}{x_{n+1}} \Rightarrow \lim a_n = \lim 2024\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = 253$.	0,5
	Dễ thấy (a_n) là dãy tăng và $\lim a_n = 253 \Rightarrow a_n < 253, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $\forall M \geq 253: a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,75
	$\forall m < 253$, vì $\lim a_n = 253$ nên với $\varepsilon = 253 - m > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n \geq n_0: a_n - 253 < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon = m - 253 < a_n - 253 \Rightarrow m < a_n, \forall n \geq n_0$. Vậy $\min M = 253$.	0,75
Câu 2 (5,0 điểm)	Giả sử $f(x)$ là một nghiệm hàm của bài toán. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ký hiệu $P(x, y): f(x^2 + y) - 2yf(x) = f(f(x)) + f(-y)$. (1)	1,0

	Khi đó, $P(1, \frac{-1}{2}): f(\frac{1}{2}) + f(1) = f(f(1)) + f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(1) = f(f(1)).$ $P(1, 0): f(1) = f(f(1)) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$	
	$P(0, y): f(y) = f(-y), \forall y \in \mathbb{R}$ Suy ra f là hàm số chẵn. $P(x, 0): f(x^2) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$	1,0
	$P(x, -y^2): f(x^2 - y^2) + 2y^2 f(x) = f(f(x)) + f(y^2) = f(f(x)) + f(f(y)) =$ $= f(f(y)) + f(f(x)) = f(y^2 - x^2) + 2x^2 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$	1,0
	Vì f là hàm số chẵn nên $f(x^2 - y^2) = f(y^2 - x^2) \Rightarrow y^2 f(x) = x^2 f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, xy \neq 0: \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2} = c = \text{const} \Rightarrow f(x) = cx^2, \forall x \neq 0.$	1,0
	Vì $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = cx^2, \forall x \in \mathbb{R}$ Thử lại vào (1), ta có $c = c^3 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = \pm 1 \end{cases}$ Vậy bài toán có 3 nghiệm hàm $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}$	1,0
Câu 3a: (2.5 điểm)	Bổ đề. Tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Khi đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.  Chứng minh bổ đề Vì các tứ giác $BDHF, CDHE$ và $BCEF$ nội tiếp nên $HDF = HBF$, $HDE = HCE$ và $HBH = HCE$ Suy ra $HDF = HDE$ hay DH là phân giác trong của EDF	1,0

	Tương tự EH là phân giác trong của DEF . Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .	
	Trở lại bài toán 	
	Vì $DAB = DCB$ và $DAC = DBC$ nên các tứ giác $ACA'C'$ và $ABA'B'$ nội tiếp Suy ra $DA'C = DC'A$ (1') và $DC.DC' = DA.DA'$ (1) $DA'B = DB'A$ (2') và $DA.DA' = DB.DB'$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $DC.DC' = DB.DB'$ nên tứ giác $BCB'C'$ nội tiếp Suy ra $DB'C = DC'B$ (3) Mà $DB'C + DB'A = 180^\circ$ (4') và $DC'A + DC'B = 180^\circ$ (4) Từ (3), (4'), (4) suy ra $DB'A = DC'A$ (5) Từ (1'), (2') và (5) suy ra $DA'C = DA'B$ Hơn nữa $DA'B + DA'C = 180^\circ$ nên $DA'B = DA'C = 90^\circ$ (6') hay $AA' \perp BC$ (6)	1,0
	Từ (2'), (4') và (6') suy ra $DB'C = DB'A = 90^\circ$ hay $BB' \perp AC$ (7) Từ (6) và (7) suy ra D là trực tâm của tam giác ABC Áp dụng bổ đề thì D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. (Đpcm)	0,5
Câu 3b: (2.5 điểm)	Kẻ $C'C_2 \perp AC$ ($C_2 \in AC$) và $B'B_2 \perp AB$ ($B_2 \in AB$) Khi đó $AA_1, B'B_2, C'C_2$ là 3 đường cao tam giác $AB'C'$ Theo câu a thì AA', BB', CC' là 3 đường cao của tam giác ABC Do đó các tam giác $\triangle AB_2C_2, \triangle AB'C'$ và $\triangle ABC$ đồng dạng Suy ra $AB_2C_2 = ABC$ nên $B_2C_2 \parallel BC$ (8).	0,5
	Vì hai tam giác $A'BC'$ và $AB'C'$ đồng dạng và $BB_1, B'B_2$ là các đường cao tương ứng, suy ra $\frac{B_1C'}{B_1A'} = \frac{B_2C'}{B_2A'}$ nên $B_1B_2 \parallel AD$ (9) Tương tự $C_1C_2 \parallel AD$ (10)	0,5

	Từ (8), (9), (10) và $BC \perp AD$ suy ra $B_1C_1C_2B_2$ là hình thang vuông tại B_2, C_2 nên $B_1C_1 \geq B_2C_2$ (11)	
	Từ các tam giác $\triangle AB_2C_2, \triangle AB'C'$ và $\triangle ABC$ đồng dạng Suy ra $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$ và $\frac{B_2C_2}{B'C'} = \frac{AC_2}{AC'}$ Mặt khác $\frac{AC_2}{AB'} = \frac{AC'}{AB}$ (do $C'C_2 \parallel BB'$) Suy ra $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B_2C_2}{B'C'}$ hay $B_2C_2 = \frac{B'C'^2}{BC}$ (12). Từ (11) và (12) suy ra $B_1C_1 \geq \frac{B'C'^2}{BC}$ (*) Tương tự $A_1C_1 \geq \frac{A'C'^2}{AC}$ (**) và $A_1B_1 \geq \frac{A'B'^2}{AB}$ (***)	1,0
	Từ (*), (**) và (***) suy ra $B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1 \geq \frac{B'C'^2}{BC} + \frac{A'C'^2}{AC} + \frac{A'B'^2}{AB} \geq \frac{(B'C' + A'C' + A'B')^2}{BC + AC + AB}$ (BĐT Cauchy-Schwarz) Do đó $p(ABC) \cdot p(A_1B_1C_1) \geq [p(A'B'C')]^2$. (Đpcm)	0,5
Câu 4a: (3,0 điểm)	Với $\forall k = \overline{1, 675}$, tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}$ có 3 đỉnh, mỗi đỉnh được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ nên có ít nhất 2 đỉnh của tam giác đó được tô cùng một màu. Ta tô màu các cạnh nối 2 đỉnh cùng màu giống với màu hai đầu mút của nó. Với 2025 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2025}$, ta có 675 tam giác đều $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, 675}$, mà mỗi tam giác này có ít nhất một cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ nên luôn có 675 cạnh được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ.	1,0
	Suy ra luôn có 338 cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, 675}$ cùng màu. Chia 338 cạnh này thành 3 nhóm tương ứng song song hoặc trùng với các cạnh của tam giác đều $A_1A_2A_3$. Theo nguyên lý Dirichlet, luôn có 113 cạnh cùng màu và song song với nhau.	1,0
	Cứ hai cạnh bất kỳ trong 113 cạnh này, ta tạo được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, 675}$. Suy ra luôn có $C_{113}^2 = 6328$ hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, 675}$. (Đpcm)	1,0
Câu 4b: (2,0 điểm)	Ta chứng minh, với mọi số tự nhiên $n \geq 7$, luôn tìm được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$. Thật vậy, làm tương tự câu a) ta luôn có 7 cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$ được tô bởi một trong hai màu xanh và đỏ. Suy ra luôn có 4 cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$ cùng màu. Chia 4	1,0

	cạnh này thành 3 nhóm tương ứng song song hoặc trùng với các cạnh của tam giác đều $A_1A_2A_3$. Theo nguyên lý Dirichlet, luôn có 2 cạnh cùng màu và song song với nhau. Từ hai cạnh này ta tạo được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.	
	Ta chứng minh với mọi số tự nhiên $2 \leq n \leq 6$, điều này không còn đúng nữa. Với tam giác $A_1A_2A_3$, ta tô 2 đỉnh màu xanh và một đỉnh màu đỏ. Với tam giác $A_4A_5A_6$, ta cũng tô 2 đỉnh màu xanh và một đỉnh màu đỏ, trong đó một đỉnh xanh là trung điểm của cạnh xanh của tam giác $A_1A_2A_3$. Với tam giác $A_7A_8A_9 (6 \geq n \geq 3)$, ta cũng tô 2 đỉnh màu xanh và một đỉnh màu đỏ, trong đó cạnh xanh của tam giác $A_7A_8A_9$ không song song với 2 cạnh xanh của các tam giác $A_1A_2A_3$ và $A_4A_5A_6$. Với tam giác $A_{10}A_{11}A_{12} (4 \leq n \leq 6)$, ta tô 1 đỉnh màu xanh và 2 đỉnh màu đỏ. Với tam giác $A_{13}A_{14}A_{15} (5 \leq n \leq 6)$, ta cũng tô 1 đỉnh màu xanh và 2 đỉnh màu đỏ, trong đó một đỉnh đỏ là trung điểm của cạnh đỏ của tam giác $A_{10}A_{11}A_{12}$. Với tam giác $A_{16}A_{17}A_{18} (n = 6)$, ta cũng tô 1 đỉnh màu xanh và 2 đỉnh màu đỏ, trong đó cạnh đỏ của tam giác $A_{16}A_{17}A_{18}$ không song song với 2 cạnh đỏ của các tam giác $A_{13}A_{14}A_{15}$ và $A_{10}A_{11}A_{12}$. Với cách tô màu như thế, ta thấy không tồn tại một hình thang cân nào có 4 đỉnh cùng màu và có hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n} (2 \leq n \leq 6)$. Vậy $n = 7$ là giá trị nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{3n}$ bởi một trong hai màu xanh và đỏ luôn tìm được một hình thang cân có 4 đỉnh cùng màu và hai cạnh đáy là các cạnh của các tam giác $A_{3k-2}A_{3k-1}A_{3k}, \forall k = \overline{1, n}$.	1,0

----- Hết -----