



Bài 1. (5,0 điểm)

- a) Giải phương trình $7x + 3 = (2x + 3)\sqrt{x + 3}$.
- b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 0$ và $x + 2y + 3z = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 2. (5,0 điểm).

- a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c$ và $ab + bc + ca$ đều chia hết cho 8. Chứng minh rằng abc chia hết cho 64.
- b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$

Bài 3. (2,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{3c + ab + abc} + \frac{bc}{3a + bc + abc} + \frac{ca}{3b + ca + abc} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 4. (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , có H là trực tâm. Gọi O' là điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC . Đường thẳng đi qua điểm H vuông góc với đường thẳng HO' cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại M, N . Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN .

- a) Chứng minh rằng O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC .
- b) Chứng minh ba điểm A, H, I thẳng hàng.
- c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và đường tròn (O) ; Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và BC . Đường thẳng QR song song với đường thẳng OI .

Bài 5. (2,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $a^4 + 6a^2 + 2^b = c^2$.
- b) Xét số nguyên $n > 100$ thỏa mãn tồn tại tập hợp S gồm n số thực dương sao cho mỗi phần tử x của tập S đều tồn tại 100 phần tử khác x của tập hợp S có tích bằng x . Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu.

---Hết---

**HƯỚNG DẪN GIẢI****Bài 1 (5,0 điểm).**

a) Giải phương trình $7x + 3 = (2x + 3)\sqrt{x + 3}$.

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $xy + yz + xz = 0$ và $x + 2y + 3z = 0$. Tính giá trị biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq -3$. Từ phương trình, ta có $(7x + 3)^2 = (2x + 3)^2(x + 3)$ hay $(x - 1)(x - 6)(4x + 3) = 0$. Từ đó $x \in \left\{1, 6, -\frac{3}{4}\right\}$. Tuy nhiên, khi thử lại chỉ có $x = 1$ và $x = 6$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1, 6\}$.

b) Do $x + 2y + 3z = 0$ nên $x = -2y - 3z$. Mà $xy + yz + xz = 0$ nên $-(y + z)(2y + 3z) + yz = 0$, hay $2y^2 + 4yz + 3z^2 = 0$. Một cách tương đương, ta có $2(y + z)^2 + z^2 = 0$ suy ra $y + z = z = 0 \Rightarrow y = z = 0$. Từ đó $x = 0$. Vậy $P = x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Bài 2. (5,0 điểm).

a) Cho ba số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b + c$ và $ab + bc + ca$ đều chia hết cho 8. Chứng minh rằng abc chia hết cho 64.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$

Lời giải

a) Trong ba số a, b, c có hai số có cùng tính chẵn lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a và b . Suy ra $a + b$ chia hết cho 2. Mà $a + b + c$ chia hết cho 8 nên c chẵn. Từ đó $c(a + b)$ chia hết cho 4. Mà $ab + bc + ca$ chia hết cho 8 nên ab chia hết cho 4. Kết hợp với a, b cùng tính chẵn lẻ, ta suy ra a, b cùng chẵn.

Đặt $a = 2x, b = 2y, c = 2z$ với x, y, z nguyên. Từ giả thiết, ta suy ra $x + y + z$ chia hết cho 4 và $xy + yz + xz$ chia hết cho 2. Chứng minh tương tự như trên, ta có x, y, z cùng chẵn. Suy ra a, b, c cùng chia hết cho 4. Từ đó abc chia hết cho 64. Ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử tồn tại hai số nguyên x, y lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$. Khi đó $(x + y)(y + 1) - 1 + (x^2 + xy + 1) = (x + y)(x + y + 1)$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$. Mà $x + y$ và $x^2 + xy + 1$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên $x + y + 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$, mâu thuẫn vì $x^2 + xy + 1 > x + y + 1 > 0$. Vậy không tồn tại hai số nguyên lớn hơn 1 sao cho $(x + y)(y + 1) - 1$ chia hết cho $x^2 + xy + 1$.

Bài 3. (2,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{3c + ab + abc} + \frac{bc}{3a + bc + abc} + \frac{ca}{3b + ca + abc} \geq \frac{3}{5}.$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ và $z = \frac{1}{c}$, khi đó từ giả thiết, ta có $xy + yz + zx = 3$. Bất đẳng thức cần chứng

minh có thể viết được lại thành $\frac{x}{x + 3yz + 1} + \frac{y}{y + 3zx + 1} + \frac{z}{z + 3xy + 1} \geq \frac{3}{5}$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có



$$VT_{(1)} = \frac{x^2}{x^2 + 3xyz + x} + \frac{y^2}{y^2 + 3yzx + y} + \frac{z^2}{z^2 + 3xyz + z} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 9xyz + x + y + z}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM – GM ta có: $(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 3\sqrt{xzy} \cdot 3\sqrt{x^2y^2z^2} = 9xyz$

Suy ra $3xyz \leq x + y + z$. Ta cũng có $3 = xy + yz + zx \geq 3\sqrt{x^2y^2z^2}$ nên $xyz \leq 1$, từ đó

$9xyz = 6xyz + 3xyz \leq 6 + x + y + z = 2(xy + yz + zx) + x + y + z$. Kết hợp bất đẳng thức trên, ta được

$$VT_{(1)} \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + 2(x + y + z)} = \frac{x + y + z}{x + y + z + 2}$$

Lại có $(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$ nên $x + y + z \geq 3$. Kết hợp với bất đẳng thức ở trên ta được

$$VT_{(1)} \geq \frac{x + y + z}{x + y + z + \frac{2}{3}(x + y + z)} = \frac{3}{5}$$

Ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

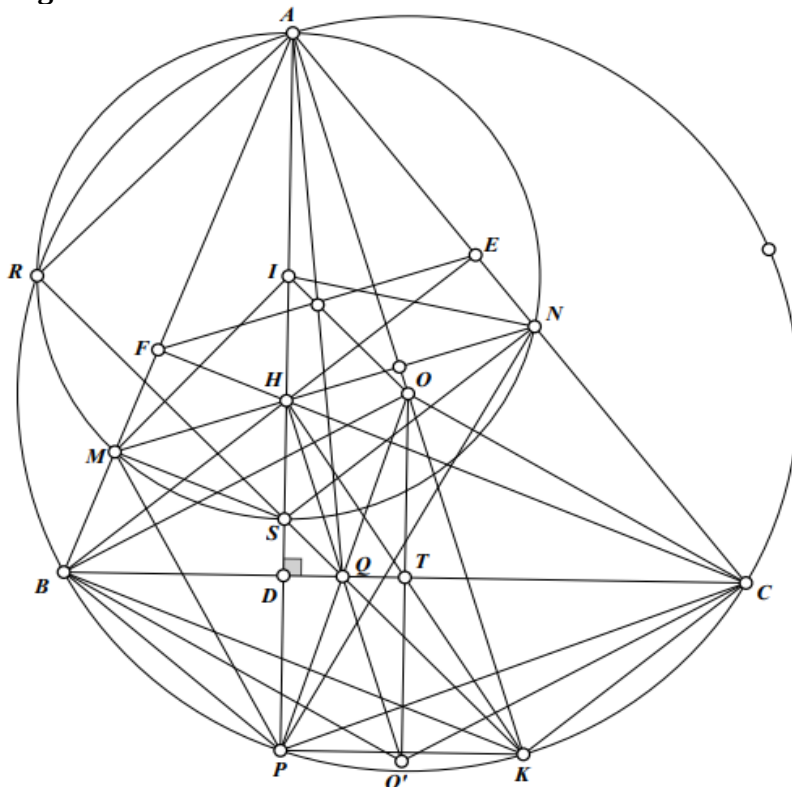
Bài 4. (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có H là trực tâm. Gọi O' là điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC. Đường thẳng đi qua điểm H vuông góc với đường thẳng HO' cắt các đường thẳng AB và AC theo thứ tự tại M, N. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

a) Chứng minh rằng O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

b) Chứng minh ba điểm A, H, I thẳng hàng.

c) Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH và đường tròn (O); Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và BC. Đường thẳng QR song song với đường thẳng OI.

Lời giải





a) Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Khi đó, ta có $ABK = ACK = 90^\circ$, nên $BK \parallel CH$ và $CK \parallel BH$. Từ đó, Tứ giác BHCK là hình bình hành, suy ra hai đoạn thẳng BC và HK có trung điểm T. Do điểm O' đối xứng với điểm O qua đường thẳng BC nên đường thẳng OO' vuông góc với BC. Mà BC là đường trung trực của đoạn thẳng OO' nên tứ giác BOCO' là hình thoi.

$$\Rightarrow O'B = O'C = OB = OC = R$$

Lại có T là trung điểm của OO' và HK nên tứ giác OHO'K là hình bình hành

$$\Rightarrow O'H = OK = R$$

$$O'B = O'C = O'H = R$$

$\Rightarrow O'$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC

b) Dễ dàng chứng minh được bổ đề sau: Cho tam giác ABC nhọn, không cân, có đường cao AD, nội tiếp đường tròn (O). Khi đó $AOC = 2ABC$ và $OAC = 90^\circ - ABC = BAD$

Trở lại bài toán: Do $AO \parallel HO'$ (vì $OK \parallel HO'$) và $MN \perp HO'$ nên $AO \perp MN$

Mà $IA = IM = IN$ nên theo bổ đề thì $NAO = 90^\circ - ANM = IAM$

Áp dụng bổ đề ta có $OAC = 90^\circ - ABC = BAD \Rightarrow ANM = ABC$ và $BAD = IAM$

Do đó hai tia AI và AD trùng nhau, hay ba điểm A, I, H thẳng hàng.

c) Gọi AS là đường kính của đường tròn (I). khi đó $AMS = ANS = ARS = 90^\circ$

$ARK = 90^\circ$ nên ba điểm R, S, K thẳng hàng.

Ta có $APK = 90^\circ$ nên $PK \parallel DT$

Mà T là trung điểm của HK nên D là trung điểm của HP.

$$\Rightarrow QHP = QPH = OPA = OAP \Rightarrow HQ \parallel AO$$

Ta có $ABC = 90^\circ - BCF = CHD = CPD$ mà $ABC = ANM$ nên $CPD = ANM$

$\triangle ANH \sim \triangle APC(g.g)$. Từ đó $\triangle ANP \sim \triangle AHC(c.g.c)$

$$\Rightarrow APN = ACH = 90^\circ - BAC = INM \text{ (Theo bổ đề trên)}$$

Từ đó $\triangle INH \sim \triangle IPN(g.g) \Rightarrow IH.IP = IN^2 = IS.IA$

$$\frac{IS}{IP} = \frac{IH}{IA} = \frac{IH + IA}{IP + IA} = \frac{AH}{AP} \text{ mà } HQ \parallel AO \text{ nên } \frac{AH}{AP} = \frac{OQ}{OP}$$

$\Rightarrow QS \parallel OI$ mà $KS \parallel OI$ (theo tính chất đường trung bình) nên ba điểm R, S, K thẳng hàng

Hay bốn điểm R, S, Q, K thẳng hàng QR // OI.

Bài 5. (2,0 điểm)

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $a^4 + 6a^2 + 2^b = c^2$.

b) Xét số nguyên $n > 100$ thỏa mãn tồn tại tập hợp S gồm n số thực dương sao cho mỗi phân tử x của tập S đều tồn tại 100 phân tử khác x của tập hợp S có tích bằng x. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu.



Lời giải:

a) Đặt $a = 2^k t$ với k tự nhiên và t là số nguyên dương lẻ. Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: b chẵn. Nếu $k = 0$, thì a lẻ, suy ra $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Lúc này $c^2 = a^4 + 6a^2 + 2^b$ chia 4 dư 3, mâu thuẫn vì số dư khi chia một số chính phương cho 4 phải là 0 hoặc 1. Do đó $k > 0$.

Nếu $b > 2k+1$, thì ta có $a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^b = 2^{2k+1} (2^{2k-1} t^4 + 3t^2 + 2^{b-2k-1})$ chia hết cho 2^{2k+1} nhưng không chia hết cho 2^{2k+2} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không là số chính phương, mâu thuẫn. Như vậy, phải có $b \leq 2k+1$. Mà b là số chẵn nên $b < 2k+1$.

Đặt $b = 2n$ với n nguyên dương và $n \leq k$. Từ giả thiết, ta có

$$A = \frac{c^2}{2^{2n}} = 2^{4k-2n} t^4 + 3 \cdot 2^{2k-2n+1} t^2 + 1 \text{ là số chính phương lẻ nên } A > 2^{4k-2n} t^4 = (2^{2k-n} t^2)^2. \text{ Lại có}$$

$$A < 2^{4k-2n} t^4 + 3 \cdot 2^{2k-2n+1} t^2 + 9 = (2^{2k-n} t^2 + 3)^2. \text{ Mà } A \text{ là số chính phương lẻ nên } A > 2^{4k-2n} t^4 = (2^{2k-n} t^2)^2 \text{ hay } 3 \cdot 2^{2k-2n+1} t^2 = (2^{2k-n+1} t^2)^2, \text{ nói cách khác ta phải có } 3 = 2^n, \text{ mâu thuẫn.}$$

Trường hợp 2: b lẻ. Giả sử $k > 0$. Nếu $b > 2k+1$, thì ta có

$a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^b = 2^{2k+1} (2^{2k-1} t^4 + 3t^2 + 2^{b-2k-1})$ chia hết cho 2^{2k+1} nhưng không chia hết cho 2^{2k+2} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không là số chính phương, mâu thuẫn. Như vậy, phải có $b \leq 2k+1$.

Ngoài ra, nếu $b < 2k+1$ thì ta có $a^4 + 6a^2 + 2^b = 2^b (2^{4k-b} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1-b} t^2 + 1)$ chia hết cho 2^b nhưng không chia hết cho 2^{b+1} . Do đó $a^4 + 6a^2 + 2^b$ không là số chính phương, mâu thuẫn.

$$\text{Vì thế } b = 2k+1. \text{ Lúc này ta có } c^2 = 2^{4k} t^4 + 3 \cdot 2^{2k+1} t^2 + 2^{2k+1} = 2^{2k} (2^{2k} t^4 + 6t^2 + 2)$$

$$\text{Suy ra } B = 2^{2k} t^4 + 6t^2 + 2 \text{ là số chính phương. Ta có } B > 2^{2k} t^4 = (2^k t^2)^2$$

$$\text{và } B < 2^{2k} t^4 + 6 \cdot 2^k t^2 + 9 = (2^k t^2 + 3)^2. \text{ Mà } B \text{ là số chính phương chẵn nên } B = (2^k t^2 + 2)^2$$

$$\text{hay } 3t^2 = 2^{k+1} t^2 + 1, \text{ suy ra } 1 \text{ chia hết cho } t^2 \text{ tức } t = 1. \text{ Từ đó, dễ dàng tìm được } k = 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

$$\text{Từ mâu thuẫn trên ta suy ra } k = 0. \text{ Do đó } c^2 = t^4 + 6t^2 + 2^b.$$

Nếu $b \geq 3$ thì $t^4 + 6t^2 + 2^b$ chia 8 dư 7, mâu thuẫn vì một số chính phương chia 8 dư 0, 1 hoặc 4. Do đó $b = 1$. Thay vào (1) ta được $c^2 = t^4 + 6t^2 + 2$

$$\text{Vì } t^4 + 6t^2 + 2 > t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2 \text{ và } t^4 + 6t^2 + 2 < t^4 + 6t^2 + 9 = (t^2 + 3)^2 \text{ nên } (t^2 + 1)^2 < c^2 < (t^2 + 3)^2.$$

Suy ra $c^2 = (t^2 + 2)^2$. Thay vào phương trình (2) ta được $t = 1$ (một cách tương ứng, ta có $a = 1$). Từ đó $c = 3$. Vậy, có duy nhất một bộ số (a, b, c) cần tìm là $(1, 1, 3)$.

b) Ta sẽ chứng minh $n = 104$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn. Rõ ràng $n \geq 101$. Gọi $x_1 < \dots < x_n$ là n phần tử của tập hợp S . Đặt $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$. Xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $n = 101$. Lúc này, ứng với mỗi x_i thì tích 100 phần tử còn lại trong S phải bằng x_i . Suy ra $P = x_1^2 = x_2^2 = \dots = x_n^2$. Vô lý.



Trường hợp 2: $n = 102$. Lúc này, giả sử $x_1 = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{100}}$ với $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{100}$ thì trong S có một phần tử y nữa và $P = y \cdot x_1 \cdot x_{i_1} \dots x_{i_{100}} = x_1^2 y \leq x_1^2 x_{102}$.

Lại giả sử $x_{100} = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{100}}$ với $1 < j_1 < j_2 < \dots < j_{100}$ thì $P = x_{102}^2 \cdot z$ với $z \in S$ nào đó suy ra $P > x_{102}^2 \cdot x_1$.
 Vậy $P < x_{102}^2 \cdot x_1 \leq x_1^2 \cdot x_{102}$ nên $x_{102} \leq x_1$. Vô lý.

Trường hợp 3: $n = 103$. Lý luận tương tự như trên, ta cũng có $P = x_1^2 yz$ với $y, z \in S$ nào đó nên $P < x_1^2 \cdot x_{101} x_{103}$ và $P = x_{103}^2 uv$ với $u < v$ và $u, v \in S$ nào đó, nên $P \geq x_{103}^2 \cdot x_1 \cdot x_2$ suy ra $x_{103}^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \leq x_1^2 \cdot x_{101} x_{103}$ hay $x_{103} \cdot x_2 \leq x_{102} x_1$, vô lý vì $x_{103} > x_{102} > 0$ và $x_2 > x_1 > 0$.

Bây giờ chúng minh $n = 104$ thoả mãn đề bài. Chọn

$$S = \{2^{-52}, 2^{-52}, \dots, 2^{-1}\} \cup \{2^1, 2^2, \dots, 2^{52}\}$$

Lúc đó tích các phần tử của S là 1, với mỗi $x \in S$ ta chỉ cần chỉ ra tồn tại $a < b < c \in S$ đều khác x sao cho $x^2 abc = 1$ thì lúc đó 100 phần tử còn lại của S sẽ có tích bằng x . Xét $x = 2^k$ với $k \geq 1$. Trường hợp $k \leq -1$ chứng minh tương tự.

Nếu $k \geq 3$ chọn $a = 2^{-1}, b = 2^{-1-k}, c = 2^{-k}$ thì $x^2 abc = 1$.

Nếu $k = 2$ chọn $a = 2^{-4}, b = 2^1, c = 2^{-1}$ thoả mãn

Nếu $k = 1$ chọn $a = 2^{-2}, b = 2^3, c = 2^{-3}$ thoả mãn

Vậy $n = 104$ thoả mãn. Ta có điều phải chứng minh.