

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$

a) Với $a = 2$, tìm $\lim u_n$.

b) Với $a \in (-1; 3)$ chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_n \in (-1; 0)$, $\forall n \geq k$.

Bài 2 (5,0 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2x + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. (*)$$

Chứng minh rằng f hoặc là hàm hằng hoặc là toàn ánh.

Bài 3 (5,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn đó (T là tiếp điểm). Kẻ đường kính TA của (O) . MA cắt (O) tại điểm thứ hai là B . Lấy C thuộc (O) (C, B nằm khác phía đối với AT). Gọi D là điểm đối xứng với T qua C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác $BT D$ cắt BC và MT lần lượt tại H ($H \neq B$) và K ($K \neq T$).

a) Chứng minh rằng $\frac{BT}{BD} = \frac{HD}{HT}$.

b) Gọi N là giao điểm của BC và DM . Chứng minh rằng các điểm B, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 4 (5,0 điểm). Một bác nông dân đi vào rừng nhặt được 223 hạt dẻ. Bác ấy muốn chia số hạt dẻ nhặt được cho 5 con sóc sao cho con nào cũng nhận được ít nhất một hạt.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia để có một con sóc nhận được số hạt dẻ nhiều hơn tổng số hạt dẻ của 4 con còn lại?

b) Biết rằng tất cả các con sóc đều nhận được số hạt dẻ là số lẻ không chia hết cho 3, chứng minh rằng có thể chọn ra hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là một lập phương đúng.

----- **Hết** -----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!
- Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**

Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$

a) Với $a = 2$, tìm $\lim u_n$.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 a) (3,0 điểm)	Với $a = 2$ ta có $u_1 = 2$ và $u_2 = 3$, $u_3 = \frac{5}{4}$, $u_4 = -\frac{119}{144} \in (0; 1)$.	1,0
	Ta chứng minh $u_n \in (-1; 0)$ với mọi $n \geq 4$. Giả sử $u_n \in (-1; 0)$ với $n \geq 4$. Khi đó từ hệ thức $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1$ suy ra $-1 < u_{n+1} < \frac{1}{n^2} - 1 < 0$ với mọi $n \geq 1$.	1,0
	Do đó theo quy nạp ta có $u_n \in (-1; 0)$ với mọi $n \geq 4$. Khi đó $0 \leq \frac{u_n^2}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ với mọi $n \geq 4$ nên $\lim \frac{u_n^2}{n^2} = 0$. Suy ra $\lim u_{n+1} = -1$ hay $\lim u_n = -1$.	1,0

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1$, $n = 1, 2, \dots$

b) Với $a \in (-1; 3)$ chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $u_n \in (-1; 0)$, $\forall n \geq k$.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 b) (2,0 điểm)	Với $a \in (-1; 3)$, trước hết ta chứng minh tồn tại $k \geq 1$ sao cho $u_k \in [-1; k]$. Nếu $a \in (-1; 1]$ thì $u_1 = a \in [-1; 1]$. Ta có điều phải chứng minh. Xét $a \in (1; 3)$. Giả sử ngược lại, $u_n \notin [-1; n]$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó ta suy ra $u_n > n$ với mọi $n \geq 1$. Với $a \in (1; 3)$ bằng quy nạp ta chỉ ra được $u_n < n(n+2)$, $\forall n \geq 1$.	1,0
	Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n^2} - 1 \Leftrightarrow (n+1)(n+3) - u_{n+1} = (n+2)^2 - \frac{u_n^2}{n^2}$ $\Leftrightarrow (n+1)(n+3) - u_{n+1} = \frac{n^2(n+2)^2 - u_n^2}{n^2}$ $\Rightarrow \frac{(n+1)(n+3) - u_{n+1}}{n(n+2) - u_n} = \frac{n(n+2) + u_n}{n^2} > \frac{n+3}{n}$. Suy ra $\frac{(k+1)(k+3) - u_{k+1}}{k(k+2) - u_k} > \frac{k+3}{k}$ với mọi $k \geq 1$.	1,0

	Nhân theo vế n bất đẳng thức trên với $k = \overline{1, n}$ ta được $\frac{(n+1)(n+3) - u_{n+1}}{3 - u_1} > \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ $\Rightarrow 6u_{n+1} < 6(n+1)(n+3) - (3-a)(n+1)(n+2)(n+3)$ $\Rightarrow 6u_{n+1} < (n+1)(n+3)(6 - (3-a)(n+2)),$ vô lý vì khi n đủ lớn thì vế phải âm còn vế trái dương. Vậy ta chứng minh được tồn tại $k \geq 1$ sao cho $u_k \in [-1; k]$. Khi đó $u_{k+1} = \frac{u_k^2}{k^2} - 1 \in [-1; 0]$. Và từ đó suy ra $u_n \in [-1; 0]$ với mọi $n \geq k+1$. Nếu $u_{k+1} = 0$ thì $u_{k+2} = -1$. Khi đó $u_{k+3} \in (-1; 0)$. Suy ra $u_n \in (-1; 0), \forall n \geq k+3$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	1,0
--	---	-----

Bài 2 (5,0 điểm). Xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

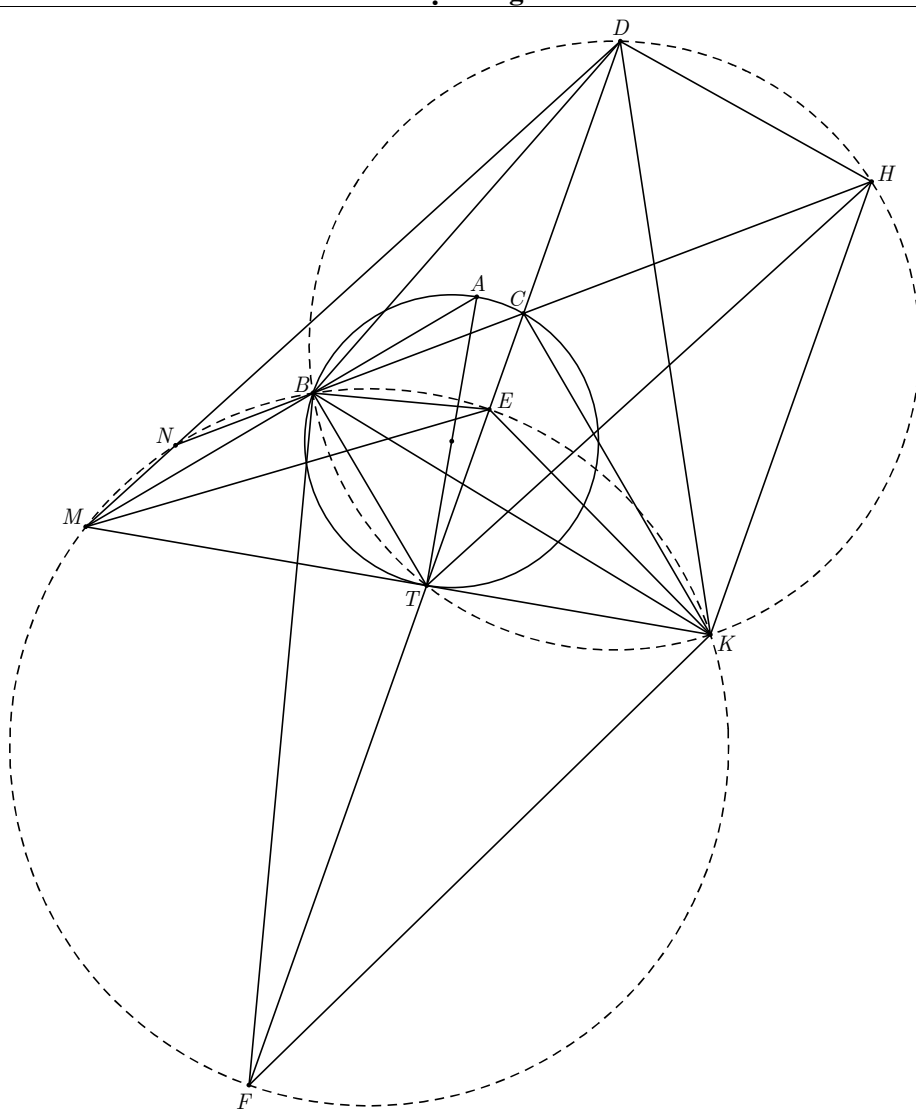
$$f(2x + y + f(x + y)) + f(xy) = yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. (*)$$

Chứng minh rằng f hoặc là hàm hằng hoặc là toàn ánh.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 2 (5,0 điểm)	Thay $x = 0$ vào (*) ta được $f(y + f(y)) + f(0) = yf(0), \forall y \in \mathbb{R}$. (1)	1,0
	Rõ ràng nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (1) ta có f toàn ánh. Giả sử $f(0) = 0$.	
	Trong (*), thay $y \rightarrow -x$, ta có $f(2x - x + f(x - x)) + f(-x^2) = -xf(x)$ hay $f(-x^2) = -(x+1)f(x)$.	1,0
	Trong đẳng thức trên, thay $x \rightarrow -x$ thì $f(-x^2) = -(-x+1)f(-x)$ nên ta có $(x+1)f(x) = (-x+1)f(-x)$. (2)	
	Từ đó cho $x = 1$ thì được $f(1) = 0$, cho $x = -1$ thì được $f(-1) = 0$.	
	Trong (*), thay $y = 0$ thì được $f(2x + f(x)) = 0, \forall x$. (3)	1,0
	Trong (*), thay $y = 1$ thì được $f(2x + 1 + f(x + 1)) = 0, \forall x$. Thay $x \rightarrow x - 1$ $f(2x - 1 + f(x)) = 0$. (4)	
	Trong (*), thay $y = -1$ thì được $f(2x - 1 + f(x - 1)) + f(-x) = -f(x)$. Thay $x \rightarrow x + 1$ $f(2x + 1 + f(x)) = -[f(x + 1) + f(-x - 1)]$. (5)	
	Trong (*), thay $x = 1$ thì được $f(2 + y + f(1 + y)) + f(y) = 0$. Cho $y = 2x - 1 + f(x)$ ta được $f(2 + 2x - 1 + f(x) + f(2x + f(x))) + f(2x - 1 + f(x)) = 0$.	1,0
	Từ đây, kết hợp với (3), (4), ta có $f(2x + 1 + f(x)) = 0$. Kết hợp với (5), suy ra $f(x + 1) + f(-x - 1) = 0$. hay $f(x) + f(-x) = 0$, chứng tỏ f là hàm số lẻ. Kết hợp với (2) ta được $(x + 1)f(x) = (x - 1)f(x)$ hay $f(x) = 0, \forall x$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	

Bài 3 (5,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn đó (T là tiếp điểm). Kẻ đường kính TA của (O) . MA cắt (O) tại điểm thứ hai là B . Lấy C thuộc (O) (C, B nằm khác phía đối với AT). Gọi D là điểm đối xứng với T qua C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BTD cắt BC và MT lần lượt tại H và K .

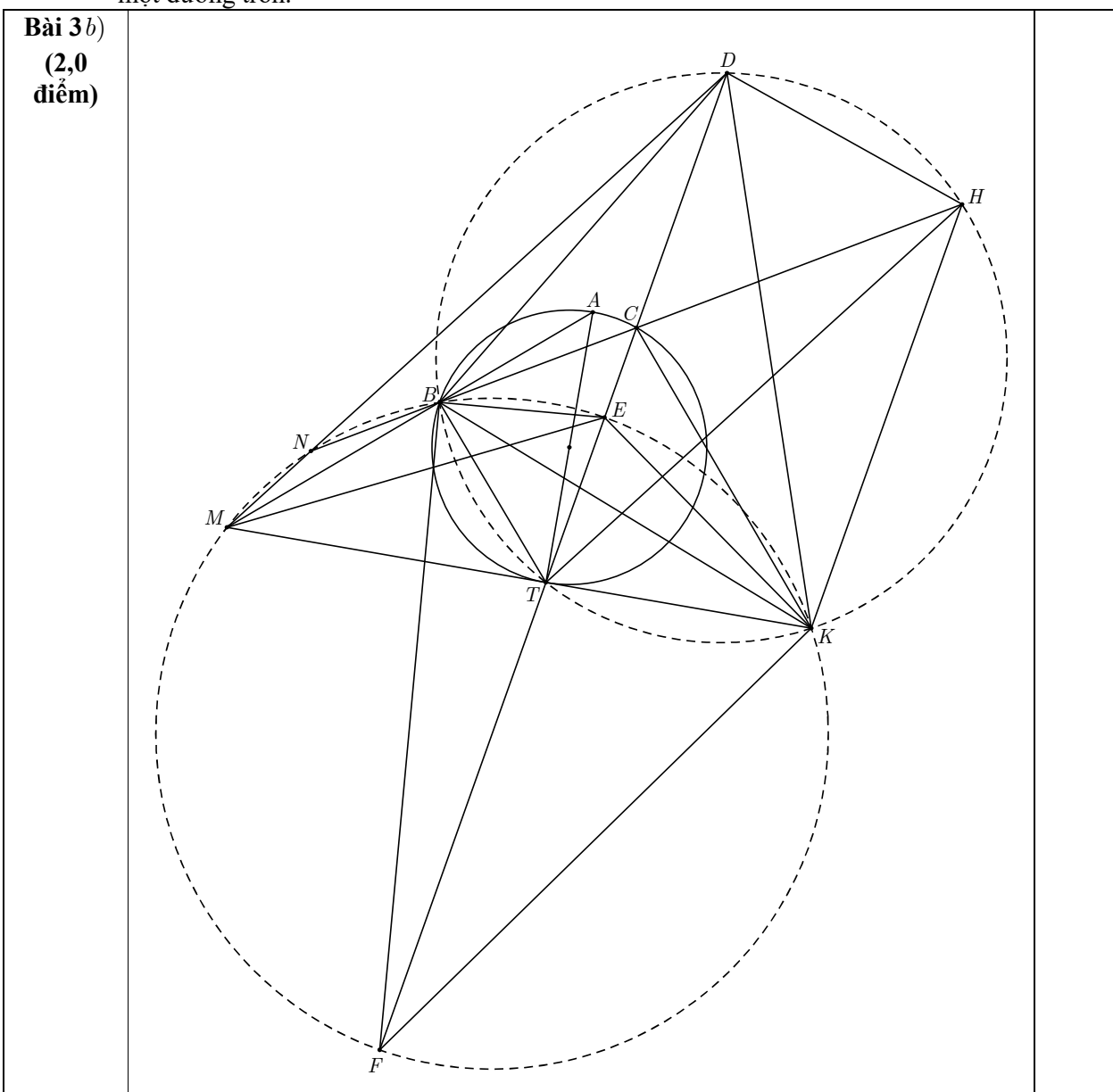
a) Chứng minh rằng $\frac{BT}{BD} = \frac{HD}{HT}$.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 3 a) (3,0 điểm)		
	a) Ta có $\widehat{DTK} = \widehat{CTK} = \widehat{CBT} = \widehat{HBT} = \widehat{HDT}$. Xét tứ giác nội tiếp $TDHK$ có $\widehat{DTK} = \widehat{HDT}$ và $\widehat{HDT} + \widehat{HKT} = 180^\circ$ nên $\widehat{DTK} + \widehat{HKT} = 180^\circ$. Suy ra $TD \parallel HK$.	1,0
	Do đó tứ giác $TDHK$ là hình thang cân. Suy ra $DH = TK \Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{KBT}$. $\Rightarrow BK$ là đường đối trung của góc B của tam giác $BCD \Rightarrow$ Tứ giác $BDKT$ là tứ giác điều hòa	1,0

$\Rightarrow \frac{BT}{BD} = \frac{KT}{KD}.$ Kết hợp với $TDHK$ là hình thang cân suy ra $\frac{BT}{BD} = \frac{HD}{HT}.$	1,0
--	-----

Bài 3 (5,0 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến MT với đường tròn đó (T là tiếp điểm). Kẻ đường kính TA của (O) . MA cắt (O) tại điểm thứ hai là B . Lấy C thuộc (O) (C, B nằm khác phía đối với AT). Gọi D là điểm đối xứng với T qua C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BTD cắt BC và MT lần lượt tại H và K .

b) Gọi N là giao điểm của BC và DM . Chứng minh rằng các điểm B, K, M, N cùng thuộc một đường tròn.



	Vì tứ giác $BDKT$ là tứ giác điều hòa nên hai đường phân giác trong của $\widehat{DBT}$ và $\widehat{DKT}$ cắt nhau tại điểm E thuộc TD; hai đường phân giác ngoài của $\widehat{DBT}$ và $\widehat{DKT}$ cắt nhau tại điểm F thuộc TD $\Rightarrow B$ và K thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBT và DKT dựng trên đoạn TD có đường kính EF.	0,5
	Ta lại có $\widehat{BEK} = 360^\circ - \widehat{BTK} - (\widehat{EBT} + \widehat{EKT})$ $= 360^\circ - (90^\circ + \widehat{BMT}) - \frac{1}{2}(\widehat{DBT} + \widehat{DKT}) = 180^\circ - \widehat{BMT} = 180^\circ - \widehat{BMK}.$ Suy ra tứ giác $BEKM$ nội tiếp.	0,5
	Do đó M cũng thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBT dựng trên đoạn TD nên ME là phân giác của góc $\widehat{DMT}$. Suy ra $\frac{MD}{MT} = \frac{ED}{ET} = \frac{KD}{KT}$ hay $\frac{MD}{KD} = \frac{MT}{KT}$. Dẫn đến DT là phân giác của góc $\widehat{MDK}$.	0,5
	Lại có $\widehat{TCK} = \widehat{DCH} = \widehat{TCB}$ suy ra phép đối xứng trục TD biến DM thành DK, biến CB thành CK nên biến điểm N thành điểm K. Phép đối xứng trục TD biến đường tròn Apollonius của tam giác DBT dựng trên đoạn TD thành chính nó, mà K thuộc đường tròn Apollonius nên N cũng nằm trên đường tròn đó. Vậy bốn điểm B, K, M, N nằm trên đường tròn Apollonius của tam giác DBT dựng trên đoạn TD.	0,5

Bài 4 (5,0 điểm). Một bác nông dân đi vào rừng nhặt được 223 hạt dẻ. Bác ấy muốn chia số hạt dẻ nhặt được cho 5 con sóc sao cho con nào cũng nhận được ít nhất một hạt.

a) Hỏi có bao nhiêu cách chia để có một con sóc nhận được số hạt dẻ nhiều hơn tổng số hạt dẻ của 4 con còn lại?

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 4 a) (3,0 điểm)	Chọn ra một con sóc có nhiều hạt dẻ nhất thì có 5 cách. Con sóc đó sẽ có từ 112 hạt trở lên, bốn con sóc còn lại sẽ nhận được ít hơn 112 hạt.	1,0
	Ta xét số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $x + y + z + t < 112$. Gọi w là số nguyên dương thỏa mãn $x + y + z + t + w = 112$.	1,0
	Số nghiệm của phương trình này là C_{111}^4 . Vậy nên số cách chia cần tìm là $5C_{111}^4$.	1,0

Bài 4 (5,0 điểm). Một bác nông dân đi vào rừng nhặt được 223 hạt dẻ. Bác ấy muốn chia số hạt dẻ nhặt được cho 5 con sóc sao cho con nào cũng nhận được ít nhất một hạt.

b) Biết rằng tất cả các con sóc đều nhận được số hạt dẻ là số lẻ không chia hết cho 3, chứng minh rằng có thể chọn ra hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là một lập phương đúng.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 4b) (2,0 điểm)	Giả sử phản chứng mình rằng với mọi cặp sóc, tích số hạt dẻ của chúng là một lập phương đúng. Khi đó gọi $x_1, x_2, \dots, x_5$ là số hạt dẻ của các con sóc thì $x_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = \overline{1, 5} \text{ và } x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 223.$	0,5
	Ta sẽ chỉ ra rằng tất cả số hạt dẻ của các con sóc đều là lập phương đúng. Thật vậy, chẳng hạn nếu có x_1 không là lập phương đúng thì tồn tại số nguyên tố p để $3 \nmid v_p(x_1)$. Mặt khác, xét $2 \leq j \leq 5$ thì theo giả sử phản chứng, ta có $3 \mid v_p(x_1 x_j)$ nên $3 \mid v_p(x_j)$, tức là đều có $v_p(x_j) \neq 0$ nên các số sẽ đều chia hết cho p . Từ đó suy ra $p \mid 223$ (và rõ ràng $p < 223$), nhưng điều này không thể xảy ra vì 223 là số nguyên tố.	0,5
	Do đó, $x_1, x_2, \dots, x_5$ đều là các lập phương đúng. Tuy nhiên, theo giả thiết thì các số này đều lẻ, mà lập phương đúng lẻ thì chia cho 9 dư 1, -1 hoặc 0. Lại theo giả thiết, các số này không chia hết cho 3, nên mỗi số đó chia cho 9 dư 1 hoặc -1.	0,5
	Khi đó tổng của chúng chia cho 9 dư 1, 3, 4, 5, 6 hoặc 8. Trong khi đó 223 chia cho 9 dư 7. Điều mâu thuẫn này cho thấy điều giả sử ở trên là sai và sẽ có hai con sóc mà tích số hạt dẻ của chúng không phải là lập phương đúng.	0,5