

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{6x - 2}$ với $x > \frac{1}{3}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. $P = 2$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -2$.

Câu 2. Điều kiện xác định của biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{x+4} + 1}{\sqrt{x-2}}$ là

- A. $x > 2$. B. $x \geq 2$. C. $x \leq -4$. D. $x \geq -4$.

Câu 3. Điểm cố định mà đồ thị hàm số $y = (m-2)x + m + 3$ luôn đi qua với mọi giá trị của tham số m là

- A. $N(1; -5)$. B. $M(-1; 5)$. C. $P(-5; 1)$. D. $Q(5; -1)$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = 2x - m$ cắt Parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Gọi M là trung điểm cạnh BC , biết $AM = 5$, $BH = 3$. Độ dài đoạn AH bằng

- A. 21. B. $\sqrt{21}$. C. $\sqrt{30}$. D. 30.

Câu 6. Cho đường tròn (O) có bán kính bằng 5. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm) sao cho $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và cát tuyến AMN với (O) . Tích $AM \cdot AN$ bằng

- A. $\frac{25}{4}$. B. $5\sqrt{3}$. C. $\frac{25}{3}$. D. 75.

Câu 7. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của AC , N thuộc cạnh BC sao cho $NC = 3BN$. Gọi P là giao điểm của AN và BM . Tỉ số $\frac{PA}{PN}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết diện tích tam giác BDC' bằng $2\sqrt{3}a^2$. Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. a^3 . B. $4a^3$. C. $8a^2$. D. $8a^2$.

Câu 9. Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 20$. Dây cung CD vuông góc với AB tại E thỏa mãn $AE = 4$. Hai tiếp tuyến với (O) tại B và C cắt nhau tại K . Độ dài đoạn OK bằng

- A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. B. $20\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{5}$. D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. C. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 11. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(3;1)$ và cắt hai tia Ox, Oy tại hai điểm phân biệt A, B khác gốc tọa độ O , biết d cách O một khoảng bằng $2\sqrt{2}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. -13. B. 3. C. 0. D. 5.

Câu 12. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích tam giác OAB bằng

- A. 6. B. $\frac{3}{2}$. C. 12. D. 3.

Câu 13. Cho hai đường thẳng song song a và b . Trên đường thẳng a có 6 điểm phân biệt, trên đường thẳng b có 5 điểm phân biệt. Số tam giác có 3 đỉnh được tạo từ 11 điểm đã cho bằng

- A. 270. B. 165. C. 75. D. 135.

Câu 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3my = m + 7 \\ 2x + (m-1)y = 4 \end{cases}$ (m là tham số). Giả sử hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$. Tổng các giá trị của tham số m để $x_0^2 + y_0^2 = 2$ là

- A. -5. B. 2. C. -2. D. 0.

Câu 15. Tích các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1^2 - 2mx_1 + m^2}{x_2} + \frac{x_2^2 - 2mx_2 + m^2}{x_1} = 7$ là

- A. $-\frac{11}{5}$. B. $\frac{11}{5}$. C. -7. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC , lấy ba điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $AEDF$ là tứ giác nội tiếp và $EF = 3a, AD = 8a$. Trên tia AD lấy điểm P (D nằm giữa A và P) sao cho $DA \cdot DP = DB \cdot DC$. Gọi S, S' lần lượt là diện tích tam giác ABC và DEF .

Giá trị lớn nhất của $\frac{S'}{S}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{16}$. C. $\frac{9}{256}$. D. $\frac{9}{64}$.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 7xy + 12y^2 + x + 3y - 3 = 0$.
b) Tìm tất cả các số nguyên $n > 2022$ sao cho $4^{1011} + 4^{1012} + 2 \cdot 4^{1013} + 4^{1014} + 4^{1015} + 2^n$ là số chính phương.

Bài 2. (4,0 điểm).

- a) Giải phương trình $x^2 + x - 2\sqrt{x+1} = 1$.
b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn $P(2022) = 2024$, $P(2023) = 2025$. Tính giá trị biểu thức $P(2024) - P(2021)$.
c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{y-3x+3} - 2 \end{cases}$

Bài 3. (4,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với hai cạnh CA, AB lần lượt tại E và F . Gọi K, L lần lượt là giao điểm của EF với IB, IC .

- a) Chứng minh rằng bốn điểm K, E, I, C cùng thuộc một đường tròn.
b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tam giác MKL cân.

c) Gọi G, H lần lượt là điểm đối xứng với E, F qua I . Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P và Q . Giả sử B, C cố định, điểm A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1} + \frac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1}$.

--- Hết ---

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

HƯỚNG DẪN GIẢI

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Mỗi câu đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	C	A	B	C	B	D	D	D
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	C	A	B	A	D	B	A	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + 7xy + 12y^2 + x + 3y - 3 = 0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên $n > 2022$ sao cho $4^{1011} + 4^{1012} + 2 \cdot 4^{1013} + 4^{1014} + 4^{1015} + 2^n$ là số chính phương.

Lời giải

a) Ta có $x^2 + 7xy + 12y^2 + x + 3y - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3xy + 12y^2 + 4xy + x + 3y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3y) + 4y(x+3y) + (x+3y) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3y)(x+4y+1) = 3$$

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ ta có bảng sau

$x+3y$	3	1	-1	-3
$x+4y+1$	1	3	-3	-1
x	12	-2	8	-6
y	-3	1	-3	1

Nghiệm của phương trình $(x; y) = (12; -3), (-2; 1), (8; -3), (-6; 1)$.

b) $A = 4^{1011} + 4^{1012} + 2 \cdot 4^{1013} + 4^{1014} + 4^{1015} + 2^n$

$$A = 4^{1011} (1 + 4 + 2 \cdot 4^2 + 4^3 + 4^4) + 2^n$$

$$A = 4^{1011} \cdot 357 + 2^n$$

$$A = 2^{2022} \cdot (357 + 2^{n-2022})$$

Vì 2^{2022} là số chính phương nên để A là số chính phương thì $357 + 2^{n-2022}$ phải là số chính phương.

+) Nếu $n - 2022$ lẻ thì $2^{n-2022} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (357 + 2^{n-2022}) \equiv 2 \pmod{3}$ suy ra $357 + 2^{n-2022}$ phải là số chính phương.

+) Nếu $n - 2022$ chẵn thì đặt $n - 2022 = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Ta có $357 + 2^{2k} = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$)

$$\Leftrightarrow a^2 - (2^k)^2 = 357 \Leftrightarrow (a + 2^k)(a - 2^k) = 357 = 3 \cdot 119 = 21 \cdot 17 = 7 \cdot 51 = 1 \cdot 357$$

Vì $a + 2^k > a - 2^k$ nên ta có bảng sau:

$a + 2^k$	357	119	51	21
$a - 2^k$	1	3	7	17
a	179	61	29	19
k	Loại	Loại	Loại	1 (tm)

Vậy $k = 1 \Rightarrow n = 2024$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + x - 2\sqrt{x+1} = 1$.

b) Cho $P(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số bậc cao nhất bằng 1 và thỏa mãn $P(2022) = 2024$, $P(2023) = 2025$. Tính giá trị biểu thức $P(2024) - P(2021)$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{y-3x+3} - 2 \end{cases}$$

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq -1$.

Ta có: $x^2 + x - 2\sqrt{x+1} = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + 2(x - \sqrt{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 + 2 \cdot \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1) \left(1 + \frac{2}{x + \sqrt{x+1}} \right) = 0 \quad (\text{Do } 1 + \frac{2}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x + \sqrt{x+1} + 2}{x + \sqrt{x+1}} = \frac{x+1 + \sqrt{x+1} + 1}{x + \sqrt{x+1}} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

b) Chọn đa thức $g(x) = x + 2$

Ta có $g(2022) = 2024$; $g(2023) = 2025$.

Đặt $Q(x) = P(x) - g(x)$; $Q(x)$ là đa thức bậc ba có hệ số cao nhất bằng 1.

Khi đó $Q(2022) = P(2022) - g(2022) = 0$; $Q(2023) = 0$.

Suy ra $Q(x)$ có ba nghiệm là 2022; 2023; a .

$$Q(x) = (x - 2022)(x - 2023)(x - a) \Rightarrow P(x) = (x - 2022)(x - 2023)(x - a) + x + 2.$$

$$P(2024) = 2(2024 - a) + 2026 = 6074 - 2a$$

$$P(2021) = (-1)(-2)(2021 - a) + 2023 = 6065 - 2a$$

$$\text{Vậy } P(2024) - P(2021) = 9.$$

c)

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} & (1) \\ \sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{y-3x+3} - 2 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} y \geq 0; x \geq 3 \\ x \geq \sqrt{y}; \frac{y+3}{3} \geq x \geq \frac{y}{4} \end{cases}$

Từ (1) suy ra $x + \sqrt{y} + x - \sqrt{y} - 2\sqrt{x^2-y} = 4x-y$

$$\Leftrightarrow 2x-y+2\sqrt{x^2-y}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-y}=y-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y}{2} \\ 4(x^2-y)=(y-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y}{2} \\ y^2-4xy+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y}{2} \\ y(y-4x+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{y}{2} \\ y=0 \\ y=4x-4 \end{cases}$$

+) $y=0 \Rightarrow x \leq 0$ (loại)

+) $y=4x-4$ thay vào (2) ta được $\sqrt{x^2-9}=3\sqrt{x-1}-2$ (3)

Đặt $\sqrt{x-1}=u$ ($u \geq \sqrt{2}$) $\Rightarrow x=u^2+1$. Thay vào (3) ta được $\sqrt{u^4+2u^2-8}=3u-2$

$$\Leftrightarrow u^4+2u^2-8=9u^2-12u+4$$

$$\Leftrightarrow u^4-7u^2+12u-12=0$$

$$\Leftrightarrow (u-2)(u^3+2u^2-3u+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ u^3+2u^2-3u+6=0 \end{cases}$$

*) $u=2 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=16 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

*) $u^3+2u^2-3u+6=0$ (4)

Vì $u \geq \sqrt{2}$ nên $u \geq 2 \Rightarrow u^3+2u^2-3u+6 \geq 2u+2u-3u+6=u+6 > 0$ nên (4) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (5; 16)$.

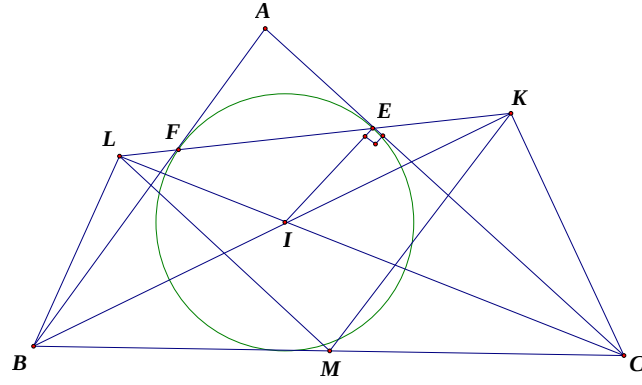
Bài 3. (4,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với hai cạnh CA, AB lần lượt tại E và F . Gọi K, L lần lượt là giao điểm của EF với IB, IC .

a) Chứng minh rằng bốn điểm K, E, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng tam giác MKL cân.

c) Gọi G, H lần lượt là điểm đối xứng với E, F qua I . Đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P và Q . Giả sử B, C cố định, điểm A thay đổi sao cho tỉ số $\frac{AB}{AC} = k$ (không đổi). Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{KEC} = \widehat{AEF} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$; $\widehat{KIC} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$

Suy ra $\widehat{KEC} = \widehat{KIC}$.

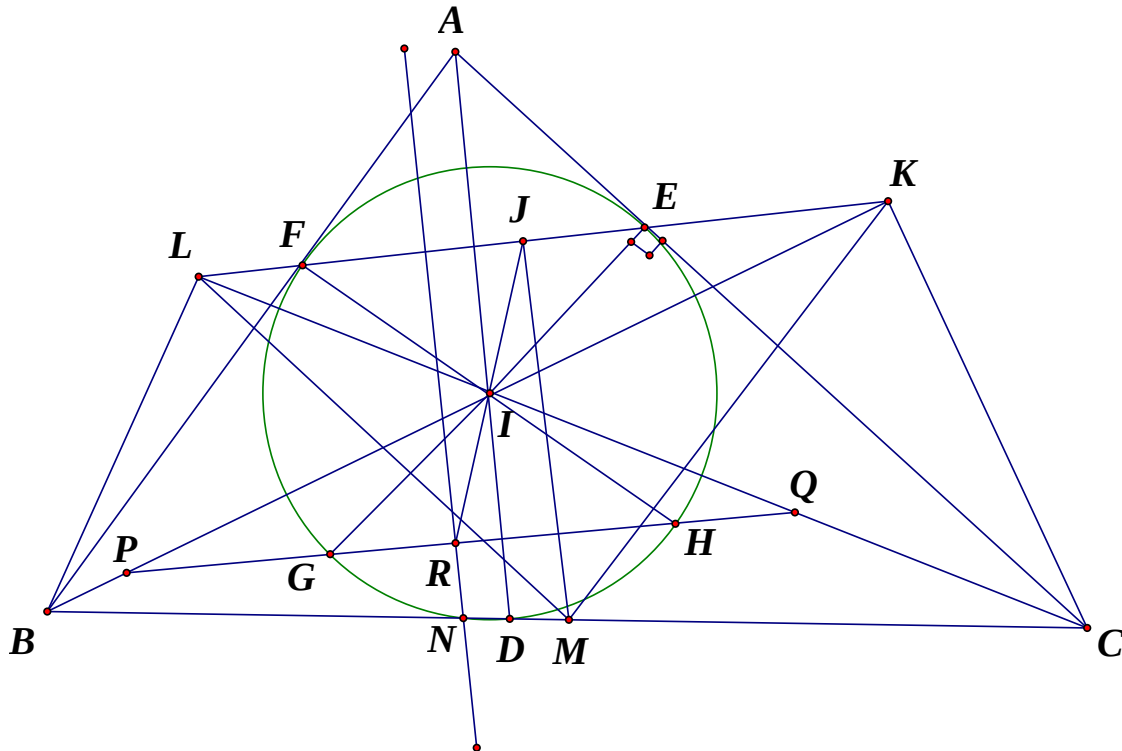
Do đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp đường tròn hay bốn điểm K, E, I, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác $KEIC$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{IKC} = \widehat{IEC} = 90^\circ \Rightarrow MK = \frac{1}{2}BC$ (1)

Tương tự tứ giác $BLFC$ nội tiếp nên $\widehat{BLC} = 90^\circ$ suy ra $ML = \frac{1}{2}BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $ML = MK \Rightarrow \Delta MKL$ cân tại M .

c)



Gọi J là trung điểm của KL . Vì tam giác KML cân nên $MJ \perp KL \Rightarrow MJ \perp EF$. (3)

Do G, H lần lượt là điểm đối xứng với E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng với đường thẳng EF qua I .

Mà đường thẳng GH cắt IB, IC lần lượt tại P và Q nên I là trung điểm của PK , I là trung điểm của QL . Vậy hai đoạn thẳng KL và PQ đối xứng nhau qua I .

Từ đó nếu gọi R là trung điểm của PQ thì J và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm của RJ .

Giả sử trung trực của PQ cắt BC tại N , ta thấy RN vuông góc với PQ và PQ song song với EF . (4)

Từ (3) và (4) suy ra RN song song JM . Gọi giao điểm của IA và BC là D , dễ thấy ID vuông góc với EF nên ID cũng song song với RN , JM . Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN .

Theo tính chất đường phân giác $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng với M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định.

Bài 4. (1,0 điểm). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1} + \frac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1}$.

Lời giải

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} = \sqrt{(a+b)^2 - ab} \geq \sqrt{(a+b)^2 - \frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}(a+b)}{2}; \sqrt{ab}+1 \leq \frac{a+b}{2}+1 = \frac{a+b+2}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{a^2+ab+b^2}}{\sqrt{ab}+1} \geq \frac{\sqrt{3}(a+b)}{a+b+2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{\sqrt{b^2+bc+c^2}}{\sqrt{bc}+1} \geq \frac{\sqrt{3}(b+c)}{b+c+2} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{c^2+ca+a^2}}{\sqrt{ca}+1} \geq \frac{\sqrt{3}(c+a)}{c+a+2} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$P \geq \sqrt{3} \left(\frac{a+b}{a+b+2} + \frac{b+c}{b+c+2} + \frac{c+a}{c+a+2} \right)$$

Đặt $a+b=x$; $b+c=y$; $c+a=z$. Khi đó $xyz=1$ và $x, y, z > 0$.

$$P \geq \sqrt{3} \left(\frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} - 1 &= \frac{2(xyz+xy+yz+zx-4)}{(x+2)(y+2)(z+2)} = \frac{2(xy+yz+zx-3)}{(x+2)(y+2)(z+2)} \geq \frac{2(3\sqrt{x^2y^2z^2}-3)}{(x+2)(y+2)(z+2)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} &\geq 1 \end{aligned}$$

Vậy $P \geq \sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=\frac{1}{2}$.