

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) So sánh biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$ với $\frac{-5}{2}$

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $3x-1 + \frac{x-1}{4} = \sqrt{3x+1}$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x+y+xy=8 \\ \frac{1}{x^2+2x} + \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình :

$$y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$$

b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2021).P(2022) = 2023$. Chứng minh rằng đa thức $P(x) - 2024$ không có nghiệm nguyên

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho đường tròn (O) và dây cung AB không đi qua tâm O . Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB ; D là một điểm thay đổi trên cung lớn AD (D khác A và B); DM cắt AB tại C

a) Chứng minh rằng $MB.BD = MD.BC$

b) Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và khi điểm D thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên một đường thẳng cố định

2) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq 2$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

a) So sánh biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}}\right)$ với $-\frac{5}{2}$

Điều kiện : $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Khi đó, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+2+x-9-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \\ A + \frac{5}{2} &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{2} = \frac{2\sqrt{x}-4+5\sqrt{x}+5}{2(\sqrt{x}+1)} = \frac{7\sqrt{x}+1}{2(\sqrt{x}+1)} > 0 \end{aligned}$$

Vậy $A > -\frac{5}{2}$

b) Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$

Ta có :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{3} \Rightarrow 2x^2+2x-1=0 \\ B &= \frac{4x^{2024}(x+1) - 2x^{2023} + 2x+1}{2x^2+3x} = \frac{2x^{2023}(2x^2+2x-1) + 2x+1}{(2x^2+2x-1)+x+1} = \frac{2x+1}{x+1} \\ \Rightarrow B &= \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1} = 3-\sqrt{3} \end{aligned}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình : $3x-1+\frac{x-1}{4}=\sqrt{3x+1}$

Điều kiện : $x \geq -\frac{1}{3}; x \neq 0$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 12x^2 - (3x+1) = 4x\sqrt{3x+1}$

Đặt $a=2x, b=\sqrt{3x+1}$. Ta có phương trình :

$$3a^2 - b^2 = 2ab \Leftrightarrow (b-a)(b+3a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=a \\ b=-3a \end{cases}$$

$$b = a \Rightarrow \sqrt{3x+1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

$$b = -3a \Rightarrow \sqrt{3x+1} = -6x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 36x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{153}}{72} (tm)$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x \in \left\{ 1; \frac{3 - \sqrt{153}}{72} \right\}$

b) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Điều kiện :
$$\begin{cases} x^2 + 2x \neq 0 \\ y^2 + 2y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ \frac{1}{x^2 + 2x} + \frac{1}{y^2 + 2y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 9 \\ \frac{1}{(x+1)^2 - 1} + \frac{1}{(y+1)^2 - 1} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ v = y+1 \end{cases}$$

Hệ đã cho trở thành :
$$\begin{cases} uv = 9 \\ \frac{1}{u^2 - 1} + \frac{1}{v^2 - 1} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv = 9 \\ 4(u^2 + v^2 - 2) = u^2v^2 - u^2 - v^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 9 \\ u^2 + v^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 9 \\ (u+v)^2 - 2uv = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = 9 \\ (u+v)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 9 \\ u+v = 6 \\ uv = 9 \\ u+v = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 3 \Rightarrow x = 2; y = 2(tm) \\ u = v = -3 \Rightarrow x = y = -4(tm) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y) \in \{(2; 2); (-4; -4)\}$

Câu 3.(2,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình :

$$y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$$

Ta có :

$$y^2 - 5y + 62 = (y-2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3) + 56 = (y-2)x^2 + (y-2)(y-4)x$$

$$\Leftrightarrow (y-2)[x^2 + (y-4)x - (y-3)] = 56$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56$$

Vì $(x-1)+(y-2)=x+y-3$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại. Ta có các trường hợp

$$*)56 = 1.7.8 \Rightarrow (x; y) = (2; 9)$$

$$*)56 = 7.1.8 \Rightarrow (x; y) = (8; 3)$$

$$*)56 = (-8).1.(-7) \Rightarrow (x; y) = (-7; 3)$$

$$*)56 = 1.(-8).(-7) \Rightarrow (x; y) = (2; -6)$$

$$*)56 = (-8).7.(-1) \Rightarrow (x; y) = (-7; 9)$$

$$*)56 = 7.(-8).(-1) \Rightarrow (x; y) = (8; -6)$$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên:

$$(x; y) \in \{(2; 9); (8; 3); (-7; 3); (2; -6); (-7; 9); (8; -6)\}$$

b) Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P(2021).P(2022)=2023$.

Chứng minh rằng đa thức $P(x)-2024$ không có nghiệm nguyên

Giả sử đa thức $P(x)-2024$ có nghiệm nguyên $x=a$, khi đó

$P(x)-2024=(x-a).Q(x) \Leftrightarrow P(x)=2024+(x-a).Q(x)$ (với $Q(x)$ là đa thức với các hệ số nguyên) . Khi đó :

$$P(2021)=2024+(2021-a).Q(2021)$$

$$P(2022)=2024+(2022-a).Q(2022)$$

Mà $P(2021).P(2022)=2023$

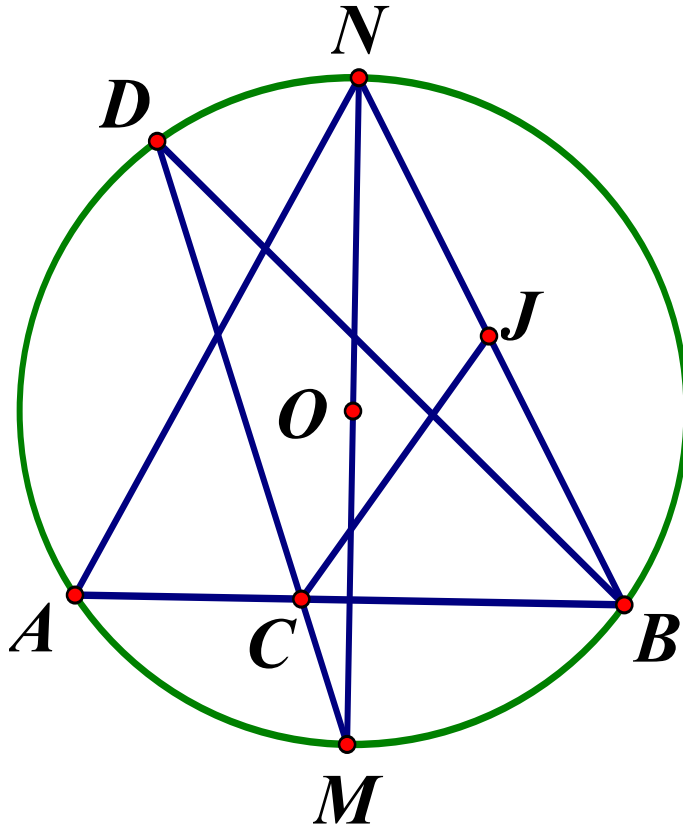
$$\Rightarrow [2024+(2021-a)Q(2021)][2024+(2022-a)Q(2022)]=2023$$

$$\Leftrightarrow 2024^2 + 2024[(2021-a)Q(2021) + (2022-a)Q(2022)] + \\ + (2021-a)(2022-a)Q(2021)Q(2022) = 2023(*)$$

Do $(2021-a)(2022-a)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp, suy ra vế trái của (*) là số chẵn. Vậy không tồn tại a để (*) xảy ra . Hay đa thức $P(x)-2024$ không có nghiệm nguyên

Câu 4. (3,0 điểm)

3) Cho đường tròn (O) và dây cung AB không đi qua tâm O. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB; D là một điểm thay đổi trên cung lớn AD (D khác A và B); DM cắt AB tại C



c) Chứng minh rằng $MB \cdot BD = MD \cdot BC$

Xét $\triangle MBC$ và $\triangle MDB$ có :

$\angle BDM = \angle MBC$ (vì M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB); $\angle BMC = \angle BMD$

$$\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MDB (g.g) \rightarrow \frac{MB}{BC} = \frac{MD}{BD} \Rightarrow MB \cdot BD = MD \cdot BC$$

d) Chứng minh rằng MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và khi điểm D thay đổi thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD nằm trên một đường thẳng cố định

Gọi (J) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDC \Rightarrow \angle BJC = 2\angle BDC = 2\angle MBC$ hay

$$\angle MBC = \frac{\angle BJC}{2}$$

$$\triangle BCJ \text{ cân tại J nên } \angle CBJ = \frac{180^\circ - \angle BJC}{2}$$

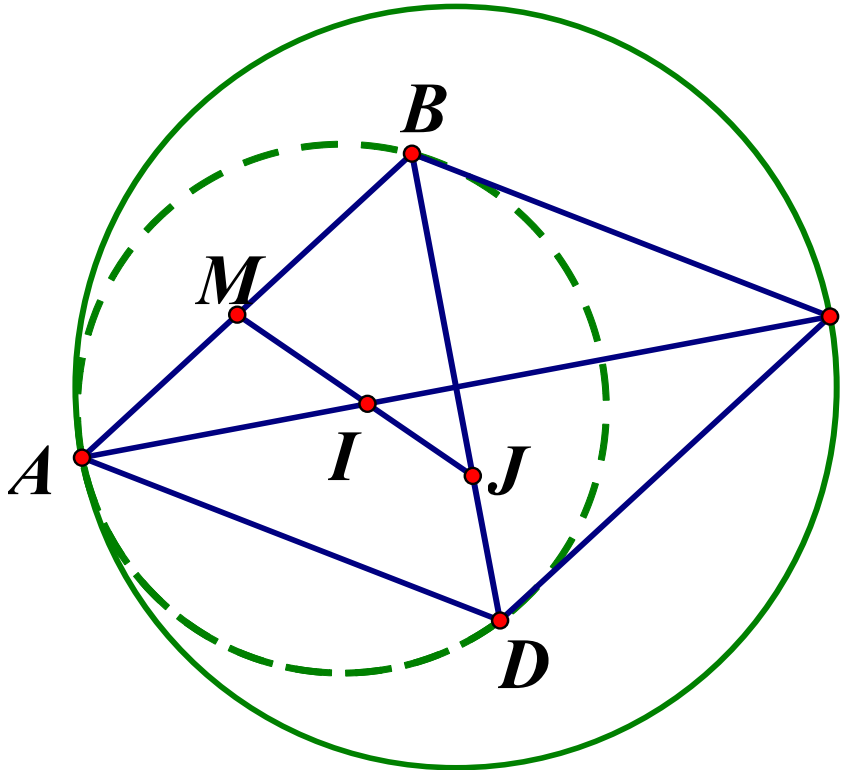
$$\Rightarrow \angle MBC + \angle CBJ = \frac{\angle BJC}{2} + \frac{180^\circ - \angle BJC}{2} = 90^\circ \Rightarrow MB \perp BJ$$

Suy ra MB là tiếp tuyến của đường tròn (J)

Kẻ đường kính MN của (O) nên $NB \perp MB$

Mà MB là tiếp tuyến của đường tròn (J), suy ra J thuộc NB

4) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $R_1 + R_2 \geq 2$



Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Đường trung trực của đoạn AB cắt AC và BD lần lượt tại I và J. Khi đó I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC

Ta có :

$$\triangle MAI \sim \triangle MJB (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{MJ}{JB} \Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{2})^2}{4R_1^2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{4R_2^2} = 1$$

$$\text{Khi đó : } 1 = \frac{1}{2R_1^2} + \frac{1}{2R_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2R_1^2} \cdot \frac{1}{2R_2^2}} = \frac{1}{R_1 R_2} \Rightarrow R_1 R_2 \geq 1$$

$$\text{Do đó } R_1 + R_2 \geq 2\sqrt{R_1 R_2} \geq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $R_1 = R_2 = 1$ hay tứ giác $ABCD$ là hình vuông

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + c = 6ab$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{a}{2b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{a^3+8b^3}{16c}$

Đặt $x = 2b$ thì $a^2 + 4b^2 + c^2 = 6ab \Rightarrow a^2 + x^2 + c^2 = 3ax$

$$P = \frac{a}{x+c} + \frac{x}{a+c} + \frac{a^3+x^3}{16c}$$

Ta có : $3ax = a^2 + x^2 + c \geq 2ax + c \Rightarrow ax \geq c > 0$

$$\frac{a^3+x^3}{16} = \frac{(a+x)(a^2+x^2-ax)}{16c} \geq \frac{(a+x)ax}{16c} \geq \frac{a+x}{16} \quad (1)$$

$$\frac{a}{x+c} + \frac{x}{a+c} = \frac{a^2}{ax+ac} + \frac{x^2}{ax+ac} \geq \frac{(a+x)^2}{2ax+c(a+x)} \geq \frac{(a+x)^2}{ax(2+a+x)} \geq \frac{4}{2+a+x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$P = \frac{a}{x+c} + \frac{x}{a+c} + \frac{a^3+x^3}{16c} \geq \frac{4}{2+a+x} + \frac{a+x}{16}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{2+a+x} + \frac{a+x+2}{16} - \frac{1}{8} \geq 2\sqrt{\frac{4}{2+a+x} \cdot \frac{a+x+2}{16}} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Đấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=x=3 \\ c=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\frac{3}{2}; c=9 \end{cases}$

Vậy $\min P = \frac{7}{8} \Leftrightarrow a=3; b=\frac{3}{2}; c=9$