

Câu 1. (5,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

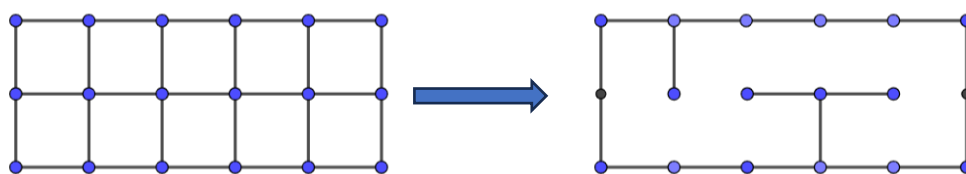
$$f(f(x) \cdot f(x+y)) = yf(x) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. (5,0 điểm) Cho A là tập tất cả các số nguyên n thỏa mãn $1 \leq n \leq 2022$ và n nguyên tố cùng nhau với 2022. Với mỗi số tự nhiên j , đặt $S(j) = \sum_{n \in A} n^j$.

- Chứng minh rằng $S(j)$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên j
- Nếu j chia hết cho 336, tìm số dư của $S(j)$ khi chia cho 2022
- Chứng minh rằng nếu j không chia hết cho 336 thì $S(j)$ chia hết cho 2022

Câu 3. (5,0 điểm) Cho căn nhà có mặt sàn là hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ban đầu, căn nhà được xây kín, chia thành $2n$ căn phòng đều nhau, ngăn cách với nhau bởi các bức tường. Sau đó, ta cần phá đi một số bức tường trong căn nhà để từ một căn phòng bất kì đều có đường đi tới tất cả các căn phòng khác.

- Hỏi cần phá ít nhất bao nhiêu bức tường để làm được như vậy.
- Với số bức tường cần phá ít nhất như trên, hãy đếm số cách phá thỏa mãn.



Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$, P là một điểm thay đổi bên trong tam giác. Điểm Q bên trong tam giác ABC sao cho $\angle PAB = \angle QAC$ và PQ song song BC . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\angle EQA = \angle PCB$ và trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $\angle FQA = \angle PBC$. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại T . Kẻ tiếp tuyến TR của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , với R là tiếp điểm nằm bên trong tam giác ABC . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ARC . Trung trực của đoạn RE cắt đường thẳng TI tại U . Chứng minh rằng đường tròn tâm U , bán kính UR luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

-HẾT-

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:

Cán bộ coi thi số 1:..... Cán bộ coi thi số 2:

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

Môn Toán

Năm học 2023-2024

Câu 1 (5,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) \cdot f(x+y)) = yf(x) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải:

Trong (1) thay $y = 0$, ta được $f(f^2(x)) = x^2$ với mọi x (2)

Trong (1) thay $x = 0$, ta được $f(f(0) \cdot f(y)) = yf(0)$ (3) với mọi y

Trường hợp 1: $f(0) \neq 0$ ta được f là đơn ánh

Trong (3) thay $y = 1$ được $f(f(0) \cdot f(1)) = f(0)$ suy ra $f(1) = 0$

Trong (2) thay $x = 1$ vào (1) ta được $f(0) = 1$ suy ra $f(f(y)) = y$ với mọi y

Trong (1) thay $y = -x$ được $f(f(x)) = -xf(x) + x^2$ suy ra $-xf(x) + x^2 = x$ hay $f(x) = x - 1, \forall x \neq 0$

Thử lại với $y > 1$ ta được $f(f(y)) = f(y - 1) = y - 2 \neq y$ (Vô lí)

Trường hợp 2: $f(0) = 0$

Trong (1) thay $y = -x$ suy ra $0 = -xf(x) + x^2$ hay $f(x) = x$.

Thử lại thấy đúng.

Vậy $f(x) = x$ với mọi x là hàm thỏa mãn đề bài.

Câu 2. (5,0 điểm) Cho A là tập tất cả các số nguyên n thỏa mãn $1 \leq n \leq 2022$ và n nguyên tố cùng nhau với 2022. Với mỗi số nguyên không âm j , đặt $S(j) = \sum_{n \in A} n^j$.

- Chứng minh rằng $S(j)$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên j
- Nếu j chia hết cho 336, tìm số dư của $S(j)$ khi chia cho 2022
- Chứng minh rằng nếu j không chia hết cho 336 thì $S(j)$ chia hết cho 2022

Lời giải:

a) Ta có $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ và $|A| = \varphi(2022) = 2 \cdot 336 = 672$.

Ta thấy rằng

- Tất cả các phần tử của A đều đồng dư $1 \pmod{2}$.

- 336 phần tử của A đồng dư $1 \pmod{3}$ và 336 phần tử còn lại đồng dư $2 \pmod{3}$.

Điều này có thể chỉ ra bởi quy luật của tập $A = \{1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29; 31; \dots\}$ là các số chia 6 dư 1; 5 và bỏ đi hai số 337; 337.5.

Như vậy với mọi j ta có

$$S(j) = \sum_{n \in A} n^j = \sum_{n \in A} 1 = 672 \equiv 0 \pmod{2} \text{ và } S(j) = \sum_{n \in A} n^j \equiv 336(1^j + 2^j) \equiv 0 \pmod{3}.$$

b) Nhận xét thêm

- Với mỗi $m \in \{1, 2, \dots, 336\}$ tồn tại đúng hai phần tử trong A đồng dư $m \pmod{337}$.

Thật vậy; ta thấy có 6 hệ thặng dư đầy đủ $\pmod{337}$ trong các số từ 1 đến 2022.

Xét $m \in \{1, 2, \dots, 336\}$ bất kì.

Khi đó trong 6 số $\{m; m+337; m+337.2; m+337.3; m+337.4; m+337.5\}$ có đúng 3 số lẻ; và trong 3 số lẻ đó có đúng một số chia hết cho 3. Suy ra tồn tại đúng hai phần tử trong A đồng dư $m \pmod{337}$.

Như vậy ta có

$$S(j) = \sum_{n \in A} n^j \equiv 2(1^j + 2^j + \dots + 336^j) \pmod{337}.$$

+) Nếu $336 \mid j$.

Theo định lý Fermat nhỏ ta có $n^j \equiv 1 \pmod{337}$ với mọi $n \in \{1, 2, \dots, 336\}$, và do đó

$$S(j) \equiv 2 \cdot 336 \equiv 672 \pmod{337}.$$

Lại có $S(j) \equiv 0 \pmod{2}$; $S(j) \equiv 0 \pmod{3}$ nên $S(j) \equiv 672 \pmod{2022}$.

c)

+) Nếu $336 \nmid j$.

Gọi g là căn nguyên thủy modulo 337 thì khi đó $\{1; 2; \dots; 336\} \equiv \{g^1; g^2; \dots; g^{336}\} \pmod{337}$

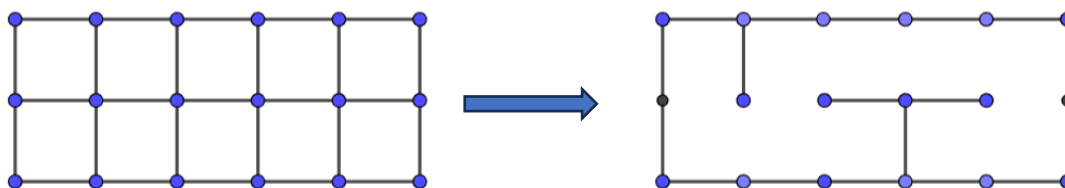
Khi đó $g^j \not\equiv 1 \pmod{337}$ và

$$S(j) \equiv 2 \cdot ((g^j)^1 + (g^j)^2 + \dots + (g^j)^{336}) = 2 \cdot \frac{(g^j)^{337} - g^j}{g^j - 1} \equiv 0 \pmod{337} \text{ theo định lý Fermat nhỏ}$$

Suy ra ở trường hợp này $S(j) \equiv 0 \pmod{2022}$. (đpcm)

Câu 3.(5,0 điểm) Cho căn nhà hình chữ nhật kích thước $2 \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Ban đầu, căn nhà được xây kín, chia thành $2n$ căn phòng đều nhau, ngăn cách với nhau bởi các bức tường. Sau đó, ta cần phá đi một số bức tường ở trong căn nhà để từ một căn phòng bất kì đều có đường đi tới tất cả các căn phòng khác.

- d) Hỏi cần phá ít nhất bao nhiêu bức tường để làm được điều như vậy.
e) Với số bức tường cần phá ít nhất như trên, hãy đếm số cách phá thỏa mãn.



Lời giải:

Ta gọi căn nhà thỏa mãn từ một phòng bất kì đều có đường đi tới tất cả các căn phòng khác là căn nhà “thông”

a) Ta thay đổi góc nhìn để cho cách tư duy và trình bày được mạch lạc hơn, giả sử lúc đầu căn nhà trống – tức là không có bức tường nào ở bên trong, ta có thể xây nhiều nhất bao nhiêu bức tường và có bao nhiêu cách xây để căn nhà vẫn thông.

Ta chứng minh với căn nhà $2 \times n$ trống thì ta có thể đặt được tối đa $n-1$ bức tường để căn nhà vẫn thông (*).

- Với $n=1$, ta đặt được tối đa 0 tường nên (*) đúng
- Với $n=2$, ta đặt được tối đa 1 tường nên (*) đúng
- Giả sử (*) đúng đến n , ta chứng minh (*) cũng đúng với $n+1$. Tức là ta có bảng $2 \times (n+1)$

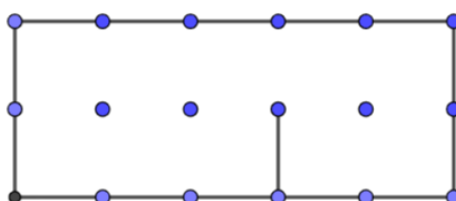
Nếu ta không dùng thanh dọc suy chỉ có thể dùng tối đa n thanh ngang

Nếu ta có dùng thanh dọc, thì chắc chắn không thể dùng tiếp thanh dọc nằm trên cùng đường thẳng đó, và thanh dọc chia căn nhà thành 2 căn nhà nhỏ trái và phải, lần lượt là $2 \times a$ và $2 \times b$, mỗi căn nhà đều thông

Theo giả thiết quy nạp, trong căn nhà $2 \times a$ có thể đặt tối đa $a-1$ bức tường, và trong căn nhà $2 \times b$ có thể đặt tối đa $b-1$ bức tường nên căn nhà $2 \times (n+1)$ có thể đặt tối đa $a-1+b-1+1=a+b-1=n$ bức tường.

Như vậy (*) đúng với mọi n

Mà trong căn nhà kín $2 \times n$ có $3n-2$ bức tường, như vậy ta cần phá ít nhất $2n-1$ bức tường để căn nhà thông.



Nhận xét: có cách quy nạp sai dễ khiến học sinh mắc phải, đó là để căn nhà $2 \times (n+1)$ thông thì trong 3 vị trí cuối chỉ có tối đa 1 bức tường, và căn nhà $2 \times n$ cột đầu thì có tối đa $n-1$ bức tường theo giả thiết quy

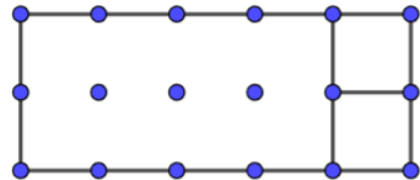
nap suy ra căn nhà $2 \times (n+1)$ có tối đa $1+n-1=n$ bức tường. Cách này là sai vì khi 3 vị trí cuối k có bức tường nào thì căn nhà $2 \times n$ cột đầu tiên không cần thông nên k dùng được giả thiết quy nạp (ví dụ hình trong đề bài).

b) Số cách phá $2n-1$ bức tường trong căn nhà $2 \times n$ kín bằng số cách đặt $n-1$ bức tường vào căn nhà $2 \times n$ trống sao cho căn nhà đó vẫn thông.

Ta đếm bằng công thức truy hồi. Gọi a_n là số cách đặt $n-1$ bức tường vào căn nhà $2 \times n$ trống sao cho căn nhà đó vẫn thông, b_n là số cách đặt $n-1$ bức tường vào $2 \times n$ trống mà không có thanh ngang ở cột thứ n sao cho căn nhà đó vẫn thông.

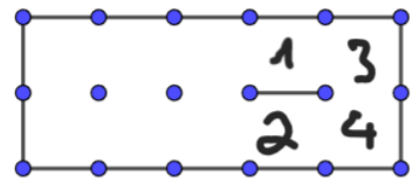
Với căn nhà $2 \times (n+1)$, trong 3 vị trí bức tường ở cột thứ $n+1$ như hình vẽ, ta chỉ có thể đặt tối đa 1 bức tường. Do đó ta xét 2 trường hợp

TH1: Nếu trong 3 vị trí đó có đúng 1 bức tường, thì chắc chắn căn nhà gồm n cột đầu tiên phải thông và ta đặt đúng $n-1$ bức tường vào trong căn nhà đó nên có a_n cách



TH2: Nếu 3 vị trí đó không có bức tường nào nên trong căn nhà gồm n cột đầu tiên có đúng n bức tường, do đó căn nhà này không thông và chắc chắn phải có thanh ngang ở cột thứ n như hình vẽ.

Thật vậy giả sử căn nhà gồm n cột đầu tiên không có thanh ngang đó. Chú ý là căn nhà này không thông, đồng thời phòng số 1 và phòng số 2 thông nhau, và từ 2 phòng này thì không thể đi đến tất cả các phòng khác. Do đó khi xét căn nhà $2 \times (n+1)$ ban đầu, thì từ phòng số 3 để đi đến các phòng phía trước thì phải đi qua phòng số 1 hoặc số 2, nhưng từ 2 phòng này lại không thể đi đến tất cả các phòng được, ta có mâu thuẫn.



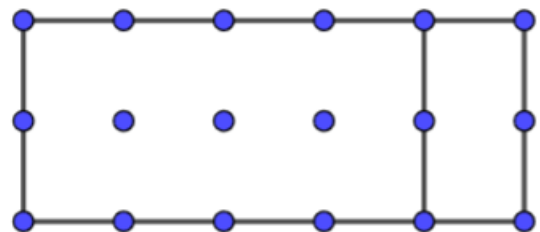
Và đặc biệt, khi ta bỏ bức tường ngang này đi thì căn nhà $2 \times n$ có đúng $n-1$ bức tường và thông. Thật vậy giả sử căn nhà này vẫn không thông, lập luận tương tự phần trên, phòng số 1 và phòng số 2 đã thông nhau nhưng vẫn không đi được đến tất cả các phòng, thì khi xét trong căn nhà $2 \times (n+1)$ ban đầu, phòng số 1 và phòng số 2 thông nhau do có thể đi qua phòng 3 và phòng 4, thì cũng sẽ không đi được đến các phòng phía trước, ta có mâu thuẫn. Do vậy số cách trong trường hợp là b_n

$$\text{Vậy } a_{n+1} = 3a_n + b_n$$

Ta lập công thức truy hồi cho cho b_n

Với căn nhà $2 \times (n+1)$ mà không có bức tường ngang trong cột thứ $n+1$.

TH1: Nếu có 1 trong 2 bức tường dọc ở cuối như hình vẽ, thì căn nhà gồm n cột đầu tiên là căn nhà thông và có đúng $n-1$ bức tường suy ra có a_n cách



TH2: Nếu không có 2 bức tường dọc này thì trong căn nhà gồm n cột đầu có n bức tường, do đó căn nhà này không thông. Với ý tưởng tương tự phần trên, thì trong căn nhà $2 \times n$ này chắc chắn phải có thanh giữa ở cột thứ n , và nếu bỏ thanh này đi thì căn nhà $2 \times n$ sẽ thông, do đó có b_n cách.

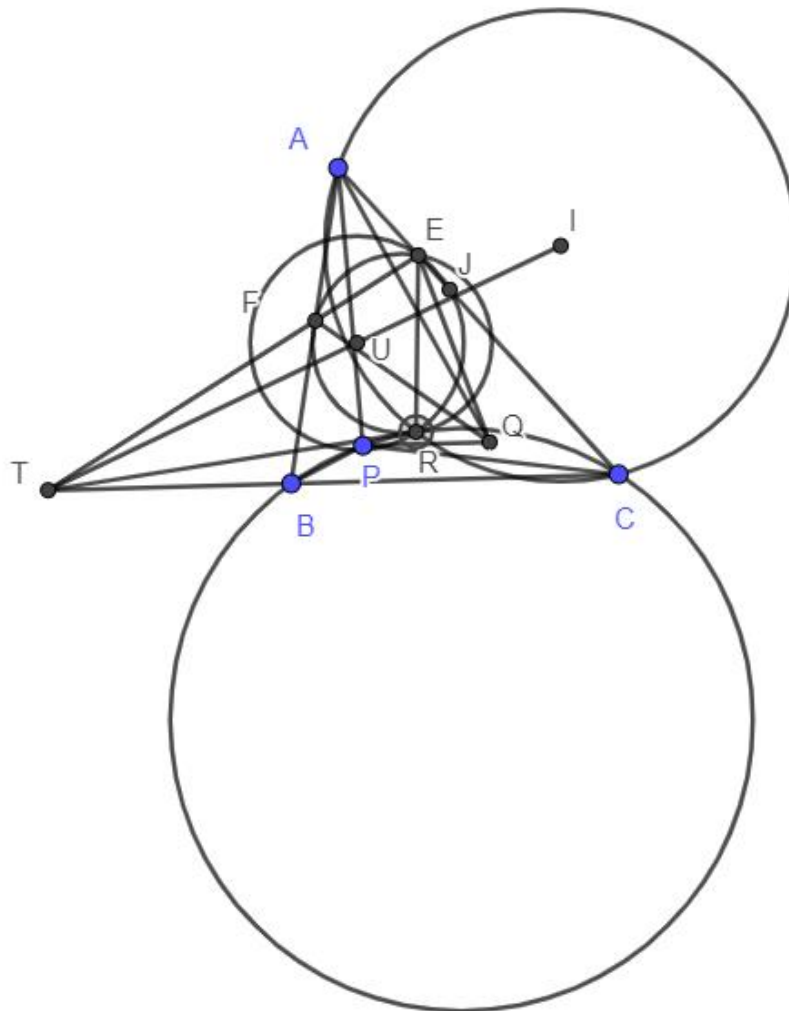
Do đó ta được $b_{n+1} = 2a_n + b_n$ suy ra $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n$ suy ra $b_{n+1} = a_{n+1} - a_n$

Thay vào ta được: $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$.

Kết hợp với việc thử những giá trị nhỏ, ta được dãy $a_1 = 1; a_2 = 4, a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$

Giải ra ta được $a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n], n \geq 1$

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$, P là một điểm thay đổi bên trong tam giác. Điểm Q bên trong tam giác ABC sao cho $\angle PAB = \angle QAC$ và PQ song song BC . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\angle EQA = \angle PCB$ và trên cạnh AB lấy điểm F sao cho $\angle FQA = \angle PBC$. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại T . Kẻ tiếp tuyến TR với đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC , với R bên trong tam giác ABC . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ARC . Trung trực của đoạn RE cắt đường thẳng TI tại U . Chứng minh rằng đường tròn tâm U , bán kính UR luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



Lời giải:

+) Gọi P^* là điểm liên hợp đẳng giác với P đối với tam giác ABC . Dễ thấy P^*ECQ và P^*FBQ là các tứ giác nội tiếp. Suy ra $AE \cdot AC = AP^* \cdot AQ = AF \cdot AB$. Suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

+) Do TR là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC đó $TR^2 = TB \cdot TC = TE \cdot TF$ suy ra TR cũng là tiếp tuyến của (REF) hay (REF) tiếp xúc với (RBC)

+) Xét phép nghịch đảo f cực R , phương tích r^2 tùy ý. Ký hiệu $f(X) = X^*$ với mọi điểm X

Do hai đường tròn (REF) và (RBC) tiếp xúc nhau tại R nên $f : (REF) \mapsto E^*F^*$, $(RBC) \mapsto B^*C^*$ mà $E^*F^* \parallel B^*C^*$ và $E^*F^*B^*C^*$ là hình thang cân. Gọi J là giao của trung trực BC và AC và Q là giao hai đường tròn (ARC) và (ERJ) . Ta cần chứng minh $TR = TQ$. Khi chứng minh được thì do R, Q là hai giao điểm của hai đường tròn (ARC) và (ERJ) nên T, I và tâm V của đường tròn ngoại tiếp tam giác REJ thẳng hàng. Khi đó V là giao của trung trực RE với TI nên V trùng U . Hay đường tròn tâm U , bán kính UE chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác REJ . Đường tròn này đi qua J cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $TR = TQ$

$$f : (ARC) \mapsto A^*C^*; (EJR) \mapsto E^*J^*, EF \mapsto (RE^*F^*); BC \mapsto (RB^*C^*) \text{ nên } T \mapsto T^* = (RE^*F^*) \cap (RB^*C^*)$$

$$\text{và } A = BF \cap CE \mapsto A^* = (RB^*F^*) \cap (RC^*E^*)$$

Gọi K là giao hai đường tròn (ARC) và (ERJ) thì $f : K \mapsto K^* = A^*C^* \cap J^*E^*$

$$\text{Tuy nhiên } JB = JC \Leftrightarrow J^*B^* \cdot \frac{r^2}{RJ^* \cdot RB^*} = J^*C^* \cdot \frac{r^2}{RJ^* \cdot RC^*} \Leftrightarrow \frac{J^*B^*}{J^*C^*} = \frac{RB^*}{RC^*} \text{ và } J \text{ thuộc } EC \text{ dẫn đến } J^* \text{ thuộc } (RE^*C^*)$$

$$\text{Lại có } TQ = TR \Leftrightarrow TQ \cdot \frac{r^2}{RT \cdot RQ} = \frac{r^2}{QR} \Leftrightarrow T^*Q^* = Q^*R$$

Trong đó Q^* là giao của A^*C^* và E^*J^*

Bài toán bây giờ trở thành (sau khi lược đi tất cả các dấu *):

Cho hình thang cân $BCEF$, R là một điểm tùy ý trong mặt phẳng. Gọi A là giao thứ 2 của của hai đường tròn (RBF) và (REC) , T là giao thứ hai của hai đường tròn (REF) và (RBC) , J thuộc (ERC) sao cho

$$\frac{JB}{JC} = \frac{RB}{RC}, JE \cap AC = Q. \text{ Chứng minh } QT = QR$$

