

Bài 1 (5,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+3)\sqrt{x} + 4 = y(y^2 - 3y + 6) \\ 3(y^2 - 2y)\sqrt{x^2 - x + 7} = y^2 - x^2 + 11x - 2y - 10. \end{cases}$$

Bài 2 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} + \frac{u_n^2}{3n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng $u_n > \frac{1}{n!}$ với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

b) Tìm giới hạn của mỗi dãy số (u_n) và $(\sqrt[n]{u_n})$ khi n tiến ra $+\infty$.

Bài 3 (3,0 điểm). Xét hàm số $f: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện (1):

$$f(x^2 + 2xf(xy)) = f(xy) + xf(x+y) \text{ với mọi } x, y \in [0; +\infty).$$

a) Chứng minh rằng $f(0)$ là giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0; +\infty)$.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn (1).

Bài 4 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, $AB < AC$ và hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp tam giác ABC (với M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC) sao cho

$$\widehat{MNQ} = \widehat{NMP} = \frac{\widehat{BAC}}{2}. \text{ Đường thẳng qua } A, \text{ vuông góc với } AB \text{ cắt đường thẳng } NP \text{ tại } K.$$

Đường thẳng qua A , vuông góc với AC cắt đường thẳng MQ tại L .

a) Gọi I là tâm của hình chữ nhật $MNPQ$. Chứng minh rằng AI là phân giác của góc $\widehat{BAC}$, tứ giác $MNKL$ là hình chữ nhật và tứ giác $ABQI$ nội tiếp một đường tròn.

b) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng BK, MQ và F là giao điểm của các đường thẳng CL, NP . Chứng minh rằng ba điểm I, E, F thẳng hàng và $AE = AF$.

Bài 5 (4,0 điểm).

a) Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 3; \dots; 20\}$ và $Y = \{1; 2; 3; \dots; 8\}$. Có tất cả bao nhiêu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ sao cho với mỗi $x, y \in X$, cứ $x < y$ thì $f(x) \leq f(y)$?

b) Trên đường tròn người ta đặt 2022 số mà mỗi số là 1 hoặc -1 . Biết rằng tổng của 10 số liên tiếp nhau bất kì đều khác 0 và tổng của cả 2022 số trên đường tròn là số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của tổng tất cả các số đặt trên đường tròn.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:..... Họ tên, chữ ký GT 1:.....

Số báo danh:..... Họ tên, chữ ký GT 2:.....