

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
TRƯỜNG CHUYÊN PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2020 – 2021

- Bài 1. (2,0 điểm)** Cho các phương trình $x^2 + ax + 3 = 0$ và $x^2 + bx + 5 = 0$ với a, b là tham số
- Chứng minh rằng nếu $ab \geq 16$ thì trong hai phương trình, có ít nhất một phương trình có nghiệm
 - Giả sử hai phương trình có nghiệm chung x_0 . Tìm a, b sao cho $|a| + |b|$ đạt giá trị nhỏ nhất

- Bài 2. (1,5 điểm)** Cho phương trình $3x^2 - y^2 = 23^n$ với n là số tự nhiên
- Chứng minh nếu n chẵn thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên $(x; y)$
 - Chứng minh rằng nếu n lẻ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$

- Bài 3. (3,5 điểm)** Cho đường tròn (O) , dây cung BC không chứa tâm O và điểm A thay đổi trên cung lớn BC . Lấy các điểm E, F thỏa $\angle ABE = \angle CAE = \angle ACF = \angle BAF = 90^\circ$
- Chứng minh rằng $AE.AC = AF.AB$ và O là trung điểm EF
 - Hạ $AD \perp EF (D \in EF)$. Chứng minh rằng $\triangle DAB \sim \triangle DCA$ và điểm D thuộc một đường tròn cố định
 - Gọi G là giao điểm của AD với đường tròn (O) . ($G \neq A$). Chứng minh rằng AD đi qua một điểm cố định và $GB.AC = GC.AB$
 - Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp AEF . Chứng minh rằng AK đi qua một điểm cố định

- Bài 4. (1, 5 điểm)** Cho số tự nhiên $a = 3^{13} \cdot 5^7 \cdot 7^{20}$
- Gọi A là tập hợp các số nguyên dương k sao cho k là ước của a và k chia hết cho 105. Hỏi tập A có bao nhiêu phần tử
 - Giả sử B là một tập con bất kỳ của A có 9 phần tử. Chứng minh rằng ta luôn có thể tìm được hai phần tử của B sao cho tích của chúng là số chính phương.

- Bài 5. (1,5 điểm)** Cho hệ phương trình với k là tham số:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = k \\ \frac{y}{\sqrt{zx}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = k \\ \frac{z}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{z}{y}} = k \end{cases}$$

- Giải hệ với $k = 1$
- Chứng minh hệ vô nghiệm với $k \geq 2$ và $k \neq 3$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Giả sử cả hai phương trình đã cho đều vô nghiệm.
Khi đó, biệt thức của hai phương trình đều âm.

Tức ta có $\Delta_1 = a^2 - 12 < 0$ và $\Delta_2 = b^2 - 20 < 0$

Suy ra $a^2 + b^2 < 32 \leq 2ab$ hay $(a - b)^2 < 0$ (vô lý)

Vậy điều giả sử sai, tức là ít nhất một phương trình có nghiệm

b) Gọi m là nghiệm chung của hai phương trình đã cho. Khi đó, dễ thấy $m \neq 0$ và

$a = -\frac{m^2 + 3}{m}, b = -\frac{m^2 + 5}{m}$. Từ đây ta sử dụng BĐT AM – GM ta có:

$$|a| + |b| = \frac{m^2 + 3}{|m|} + \frac{m^2 + 5}{|m|} = \frac{|m|^2 + 3}{|m|} + \frac{|m|^2 + 5}{|m|} = 2|m| + \frac{8}{|m|} \geq 2\sqrt{2 \cdot 8} = 8$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow |m| = \frac{4}{|m|} \Leftrightarrow m = \pm 2. \text{ Khi đó } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{9}{2} \\ a = \frac{9}{2}, b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (a, b) \in \left\{ \left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2} \right); \left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{2} \right) \right\}$$

Bài 2.

a) Với n chẵn, giả sử tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình đã cho. Vì 23^n là số chính phương không chia hết cho 3 nên 23^n chia 3 dư 1. Từ đó suy ra y^2 chia 3 dư 2, mâu thuẫn vì số dư của một số chính phương khi chia cho 3 dư 0 hoặc 1. Vậy với n chẵn thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên $(x; y)$

b) Ta sẽ chứng minh khẳng định đã cho bằng phương pháp quy nạp theo n
Với $n = 1$, phương trình có nghiệm nguyên $(x, y) = (3, 2)$. Do đó khẳng định đúng với $n = 1$
Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$ (k là số nguyên dương lẻ) tức là phương trình

$3x^2 - y^2 = 23^k$ có nghiệm nguyên $(x_k; y_k)$. Khi đó ta có:

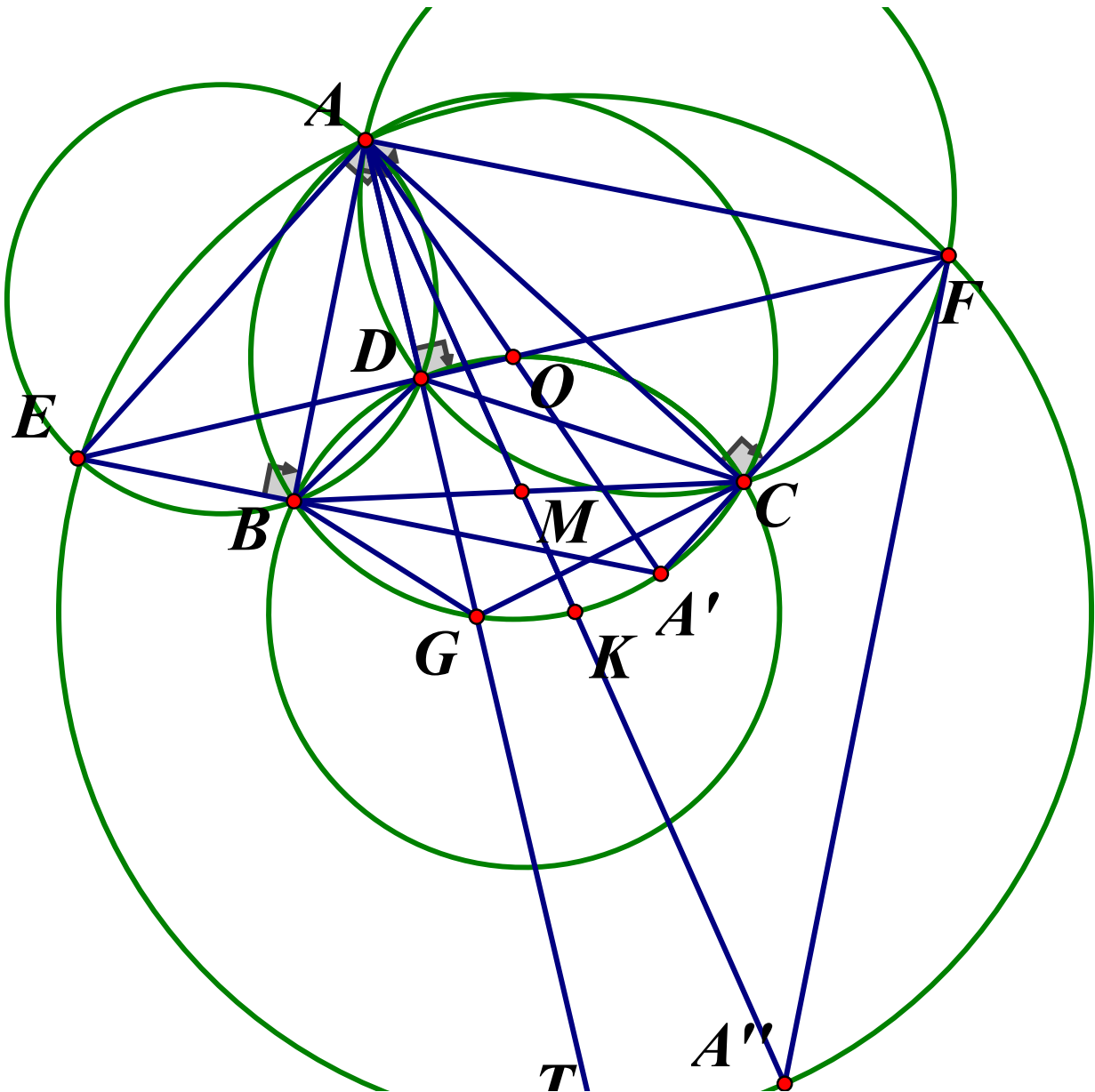
$$23^{k+1} = 23(3x_k^2 - y_k^2) = (9x_k - 2y_k)^2 - 3(2x_k - 3y_k)^2 = a^2 - 3b^2$$

Trong đó $a = 9x_k - 2y_k, b = 2x_k - 3y_k$. Suy ra:

$$23^{k+2} = 23(a^2 - 3b^2) = 3(3a - 2b)^2 - (2a - 9b)^2$$

Do đó, phương trình $3x^2 - y^2 = 23^{k+2}$ cũng có nghiệm nguyên $(3a - 2b, 2a - 9b)$. Suy ra khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp Toán học, ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên dương lẻ n

Bài 3.



a) Vì A thuộc cung lớn BC của (O) và BC không là đường kính nên $\angle BAC$ là góc nhọn

Xét hai tam giác ABE và ACF có $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ$ và $\angle BAE = \angle CAF$ (cùng phụ $\angle BAC$) nên hai tam giác này đồng dạng theo trường hợp góc – góc, do đó

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AF$$

Gọi AA' là đường kính của (O) thì ta có $\angle ABA' = \angle ACA' = 90^\circ$. Suy ra BE, BA' cùng vuông góc với AB , CF, CA' cùng vuông góc với AC nên các đường thẳng BE, CF theo thứ tự trùng các đường thẳng BA', CA' . Do đó $B \in A'E, C \in A'F$

Ngoài ra $A'E \parallel AF (\perp AC)$ và $A'F \parallel AE (\perp AB) \Rightarrow AEA'F$ là hình bình hành. Mà O là trung điểm của đường chéo AA' nên O cũng là trung điểm của EF

b) Trước hết ta có $\angle ADE = \angle ABE = 90^\circ \Rightarrow ADBE$ nội tiếp đường tròn đường kính AE ,
Và hoàn toàn tương tự, tứ giác $ADCF$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính AF

Xét hai tam giác DAB và DAC có $\angle ADB = 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - \angle AFC = \angle ADC$ và $\angle ABD = \angle AED = \angle AEF = \angle DFC = \angle DAC$. Do đó $\triangle DAB \sim \triangle DCA$ (g.g)

$$\Rightarrow \angle DCA = \angle DAB$$

Sử dụng kết quả tổng ba góc của một tam giác bằng 180° , ta có:

$$\begin{aligned} \angle BDC &= 360^\circ - \angle ADB - \angle ADC = 360^\circ - (180^\circ - \angle DBA - \angle DAB) - (180^\circ - \angle DCA - \angle DAC) \\ &= \angle DBA + \angle DAB + \angle DCA + \angle DAC \\ &= \angle DAC + \angle DAB + \angle DAB + \angle DAC = 2(\angle DAB + \angle DAC) \\ &= 2 \cdot \angle BAC = \angle BOC \end{aligned}$$

Suy ra bốn điểm B, C, O, D cùng thuộc một đường tròn. Do đó D luôn chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCO cố định

c) Dựng đường kính AA'' của đường tròn (K) ngoại tiếp $\triangle AEF$. Xét hai tam giác ADE và AFA'' có:

$$\angle ADE = \angle AFA'' = 90^\circ \text{ và } \angle AED = \angle AEF = \angle AA''F \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle AFA'' \text{ (g.g)}$$

$$\text{Do đó } \angle DAE = \angle FAA'' \text{ mà } \angle BAE = \angle CAF \text{ (cm câu a)} \Rightarrow \angle BAD = \angle A''AC$$

Gọi M là giao của AK và BC . Xét hai tam giác ABG và AMC có:

$$\angle AGB = \angle ACB = \angle ACM \text{ và } \angle BAG = \angle A''AC \text{ (cmt)} = \angle MAC \Rightarrow \triangle ABG \sim \triangle AMC \text{ (g.g)}$$

$$\text{Do đó: } \frac{BG}{AB} = \frac{MC}{MA} \text{ (1), Chứng minh tương tự, ta cũng có: } \frac{CG}{CA} = \frac{MB}{MA} \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra } \frac{MB}{MC} = \frac{MB}{MA} \cdot \frac{MA}{MC} = \frac{CG}{CA} \cdot \frac{AB}{BG} \text{ (3)}$$

Mặt khác, dễ thấy hai tam giác BAC & BDG có $\angle BCA = \angle BGA = \angle BGD$ và $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAD + \angle DBA = \angle BDG$ nên hai tam giác này đồng dạng với

$$\text{nhau suy ra } \frac{BA}{BC} = \frac{BD}{BG} \text{ (4). Tương tự ta cũng có } \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CG} \text{ (5)}$$

$$\text{Từ (4) và (5) ta suy ra } \frac{AB}{AC} = \frac{BA}{BD} \cdot \frac{CB}{CA} = \frac{BD}{BG} \cdot \frac{CG}{CD}$$

Do đó, $\frac{CG}{BG} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CD}{BD}$ (6)

Từ (3) và (6) suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{CD}{BD}$ (7)

Ngoài ra, theo câu b ta có: $\frac{DB}{AB} = \frac{DA}{AC}; \frac{DC}{AC} = \frac{DA}{AB}$, chia theo từng vế hai đẳng thức này, ta

được: $\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{AB}$. Do đó: $\frac{CD}{BD} = \frac{AC^2}{AB^2}$ (8)

Từ (6), (8) $\Rightarrow \frac{CG}{BG} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow GB \cdot AC = GC \cdot AB$

Mặt khác, ta có $\angle BDG = \angle BAC$ và $\angle BDC = 2\angle BAC$ nên $\angle CDG = \angle BAC$

$\Rightarrow \angle BDG = \angle CDG$ nên AD chứa đường phân giác trong của góc $\angle BDC$ nên đi qua y trung điểm T của cung BC không chứa O của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCO$. Vậy AD đi qua điểm T cố định.

d) Từ (7) và (8) ta suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{AC^2}{AB^2} = 1$ nên $MB = MC$ hay AK luôn đi qua trung điểm của BC cố định.

Bài 4.

a) Do a chỉ có ba ước nguyên tố là $3; 5; 7$ nên dễ thấy các ước của a cũng không có ước nguyên tố nào khác với 3 số này. Vì thế dễ thấy các số thuộc A sẽ có dạng $3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$, trong đó x, y, z là các số tự nhiên

Do $3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ là ước của $3^{13} \cdot 5^7 \cdot 7^{20}$ nên $x \leq 13, y \leq 7, z \leq 20$. Hơn nữa, ta lại có $3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ là bội của $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ nên $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$

Vậy các số thuộc A là những số có dạng $3^x \cdot 5^y \cdot 7^z$ trong đó $1 \leq x \leq 13$,

$1 \leq y \leq 7, 1 \leq z \leq 20$. Dễ thấy có 13 cách chọn x , 7 cách chọn y và 20 cách chọn z . Vậy

$|A| = 13 \cdot 7 \cdot 20 = 1820$, hay tập A có 1820 phần tử

b) Trước hết, gọi 9 phần tử của B là $b_1 = 3^{x_1} \cdot 5^{y_1} \cdot 7^{z_1}, b_2 = 3^{x_2} \cdot 5^{y_2} \cdot 7^{z_2}, \dots, b_9 = 3^{x_9} \cdot 5^{y_9} \cdot 7^{z_9}$

Ta nhận thấy với mỗi bộ số $(x; y; z)$ chỉ có hai cách quy ước tính chẵn lẻ của mỗi một trong ba số x, y, z do đó số cách quy ước tính chẵn lẻ cho ba số này là $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Do $9 > 8$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số $i, j (1 \leq i \leq j \leq 9)$ sao cho

$x_i \equiv x_j \pmod{2}, y_i \equiv y_j \pmod{2}, z_i \equiv z_j \pmod{2}$. Khi đó, do $x_i + x_j, y_i + y_j, z_i + z_j$ đều là các

số chẵn nên dễ thấy $b_i b_j = 3^{x_j+x_i} .5^{y_i+y_j} .7^{z_j+z_i}$ là một số chính phương. Đây chính là hai số cần tìm.

Bài 5.

a) Điều kiện : x, y, z cùng dấu và $xyz \neq 0$

Xét 2 trường hợp sau:

*) Trường hợp 1: x, y, z cùng dương. Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \max \{x; y; z\}$, Khi

đó ta có: $\frac{x}{\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{x}{z}} \geq 3 > 1 = k$ mâu thuẫn

*) Trường hợp 2: x, y, z cùng âm. Đặt $a = -x, b = -y, c = -z$ khi đó $a, b, c > 0$

Hệ phương trình có thể được viết lại thành

$$\begin{cases} -\frac{a}{\sqrt{bc}} + \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{c}} = 1 \\ -\frac{b}{\sqrt{ca}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 1 \\ -\frac{c}{\sqrt{ab}} + \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 1 \end{cases}$$

Biến đổi ta có phương trình tương đương với

$$\begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c}) = 0 \\ (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = 0 \Rightarrow a = b = c \\ (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} - \sqrt{a}) = 0 \end{cases}$$

Vậy với $k = 1$ thì hệ phương trình có nghiệm $(-m; -m; -m)$ với m là số thực dương nào đó

b) Giả sử tồn tại số thực $k \geq 2, k \neq 3$ sao cho hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$. Xét hai trường hợp sau:

*) Trường hợp 1: $x_0; y_0; z_0$ cùng dương. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})(\sqrt{x_0} + \sqrt{z_0}) = (k+1)\sqrt{y_0 z_0} \\ (\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0})(\sqrt{y_0} + \sqrt{x_0}) = (k+1)\sqrt{z_0 x_0} \\ (z_0 + x_0)(\sqrt{z_0} + \sqrt{y_0}) = (k+1)\sqrt{x_0 y_0} \end{cases}$$

Suy ra : $\sqrt{y_0 z_0} (\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{z_0 x_0} (\sqrt{z_0} + \sqrt{x_0}) = \sqrt{x_0 y_0} (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_0 \geq y_0 \geq z_0$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{x_0 y_0} (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0}) \geq \sqrt{z_0 x_0} (\sqrt{z_0} + \sqrt{x_0})$$

Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra dấu đẳng thức trong đánh giá trên phải xảy ra, tức $x_0 = z_0$. Mà $x_0 \geq y_0 \geq z_0$ nên $x_0 = y_0 = z_0$. Thay lại hệ đã cho, ta được $k = 3$ mâu thuẫn.

-) Trường hợp 2: x, y, z cùng âm. Đặt $a = -x_0, b = -y_0, c = -z_0$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} -\frac{a}{\sqrt{bc}} + \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{c}} = k \\ -\frac{b}{\sqrt{ca}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = k \\ -\frac{c}{\sqrt{ab}} + \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{b}} = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c}) = (1-k)\sqrt{bc} \\ (\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) = (1-k)\sqrt{ca} \\ (\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b}) = (1-k)\sqrt{ab} \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta có:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{c}) \geq 0 > (1-k)\sqrt{bc} \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy điều giả sử sai, chứng tỏ hệ vô nghiệm với $k \geq 2, k \neq 3$