

Bài 1. a) Chứng minh rằng số $a = \sqrt{12+6\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}}$ là số nguyên.

b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=9$ và $xy=4$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{7(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x^2-y^2)}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$

Bài 2. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x+2y}{x-2y} = 6 \end{cases}$$

b) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m+1)x + m + 3$ và $(d_2): y = (2m+1)x - m + 3$ (m là tham số và $m \neq 0$). Tìm tất cả các giá trị của m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm M sao cho M nằm trên đường thẳng $(d): y = x$

Bài 3. Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Các đường phân giác trong của các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm N, M (N khác B, M khác C). Hai dây cung BN và CM cắt nhau ở I . Dây cung MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BMEI$ nội tiếp và $\frac{NE}{MF} = \frac{NB \cdot NC}{MB \cdot MC}$

b) Chứng minh rằng tứ giác $AEIF$ là hình thoi

c) Cho biết $\widehat{BAC} = 60^\circ$, gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và MN . Chứng minh rằng ba điểm I, O, K thẳng hàng.

Bài 4. a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^3y - x^3 - 1 = 2x^2 + 2x + y$

b) Cho $a, b, c \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c \leq 9$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số $\overline{357abc}$, biết rằng số này chia hết cho 3; 5 và 7

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a+b+c=3$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = a^3 + b^3 + c^3$