

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NINH ĐỀ THI CHÍNH THỨC	KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2022-2023 Môn thi: TOÁN (chuyên) <i>Thời gian làm bài : 150 phút</i>
---	--

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho các số hữu tỷ x, y thỏa mãn $(3x-2)(3y-2)=1$. Chứng minh

$$A = \sqrt{x^2 - xy + y^2} \text{ là số hữu tỉ}$$

b) Giải phương trình : $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x-1}$

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x+1$ không thể viết dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó ký hiệu

$$\{a\} = a - [a] \text{ với } [a] \text{ là số nguyên lớn nhất không vượt quá } a$$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức } P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right)$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại $E (E \neq B)$. Gọi D là một điểm trên cung nhỏ $BE (D \neq B, D \neq E)$.

Hai đường thẳng DC và AH cắt nhau tại G , đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại $M (M \text{ khác } E)$, hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I , đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại $P (P \text{ khác } C)$.

a) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp

b) Chứng minh $GA.GI = GE.GM$

c) Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N , DB và CP cắt nhau tại K . Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau

Câu 5. (0,5 điểm) Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương

ĐÁP ÁN

Câu 1. (3,0 điểm)

d) Cho các số hữu tỷ x, y thỏa mãn $(3x-2)(3y-2)=1$. Chứng minh

$A = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ là số hữu tỷ

$$(3x-2)(3y-2)=1 \Leftrightarrow 9xy-6x-6y+4=1 \Leftrightarrow 3xy=2x+2y-1$$

$$A = \sqrt{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 3xy} = \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} = \sqrt{(x+y-1)^2} \\ = |x+y-1|$$

Vì x, y hữu tỷ $\Rightarrow A$ hữu tỷ

e) Giải phương trình : $6x^2 - 5x + 1 = x\sqrt{5x-1}$

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{1}{5}, pt \Leftrightarrow (6x^2 - 3x\sqrt{5x-1}) + (2x\sqrt{5x-1} - 5x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(2x - \sqrt{5x-1}) + \sqrt{5x-1}(2x - \sqrt{5x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{5x-1})(3x + \sqrt{5x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{5x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{1}{4} \text{ (tmdk)} \\ 3x + \sqrt{5x-1} = 0 \text{ (do } x \geq \frac{1}{5} \Rightarrow \text{PTVN)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{1; \frac{1}{4}\right\}$$

$$\text{f) Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 6 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Điều kiện : $x \neq 0; y \neq 0$. Nhân vế với vế của hai phương trình ta được :

$$(x+y)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \Rightarrow y=3-x \Rightarrow \frac{x^2}{3-x} + x = 6 \Rightarrow x=2; y=1 \\ x+y=-3 \Rightarrow y=-x-3 \Rightarrow \frac{x^2}{-x-3} + x = 6 \Rightarrow x=-6; y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(2;1), (-6;3)$

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x+1$ không thể viết dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp

Giả sử $25x+1 = n(n+1) (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow n+n-1 = 25x \Leftrightarrow (n-2)(n+3)+5 = 25x$

Có vẻ phải là $25x:25$ với mọi x nguyên (1)

Xét vế trái :

Th1: $(n-2):5$ thì $n+3 = (n-2)+5$ cũng chia hết cho 5 nên

$(n-2)(n+3):25 \Rightarrow$ vế trái $= (n-2)(n+3)+5$ không chia hết cho 25

Th2: $n-2$ không chia hết cho 5 thì $n+3 = (n-2)+5$ cũng không chia hết cho 5

Nên $(n-2)(n+3)$ không chia hết cho 5 $\Rightarrow (n-2)(n+3)+5$ không chia hết cho 5 hay vế trái không chia hết cho 25

Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn với (1). Vậy $25x+1$ không viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp

d) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{ \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} \right\} = \frac{1}{2}$, trong đó ký hiệu

$\{a\} = a - [a]$ với $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a

Với mọi $x: 3x^2+2x+1 = 2x^2 + (x+1)^2 > 0, 2x^2+1 > 0 \Rightarrow \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} > 0$ (1)

Với mọi $x: 2x \leq x^2+1 \Rightarrow \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} \leq \frac{4x^2+2}{2x^2+1} = 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\left\{ \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} \right\} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} = \frac{1}{2}$ hoặc $\frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} = \frac{3}{2}$

Giải $\frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Giải $\frac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Vậy các số phải tìm là $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{1}{4}$

Câu 3. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y \leq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (2x^2+2y^2+z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right)$

$$P = (2x^2 + 2y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2z^2} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có : $P \geq [(x+y)^2 + z^2] \left(\frac{2}{xy} + \frac{1}{2z^2} \right)$

$$\geq [(x+y)^2 + z^2] \left[\frac{8}{(x+y)^2} + \frac{1}{2z^2} \right] = \left[\left(\frac{x+y}{z} \right)^2 + 1 \right] \left[8 \cdot \left(\frac{z}{x+y} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{x+y}{z} \right)^2 \Rightarrow 0 < t \leq 1 \Rightarrow P \geq (t+1) \left(\frac{8}{t} + \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{2} + \frac{8}{t} + \frac{t}{2}$$

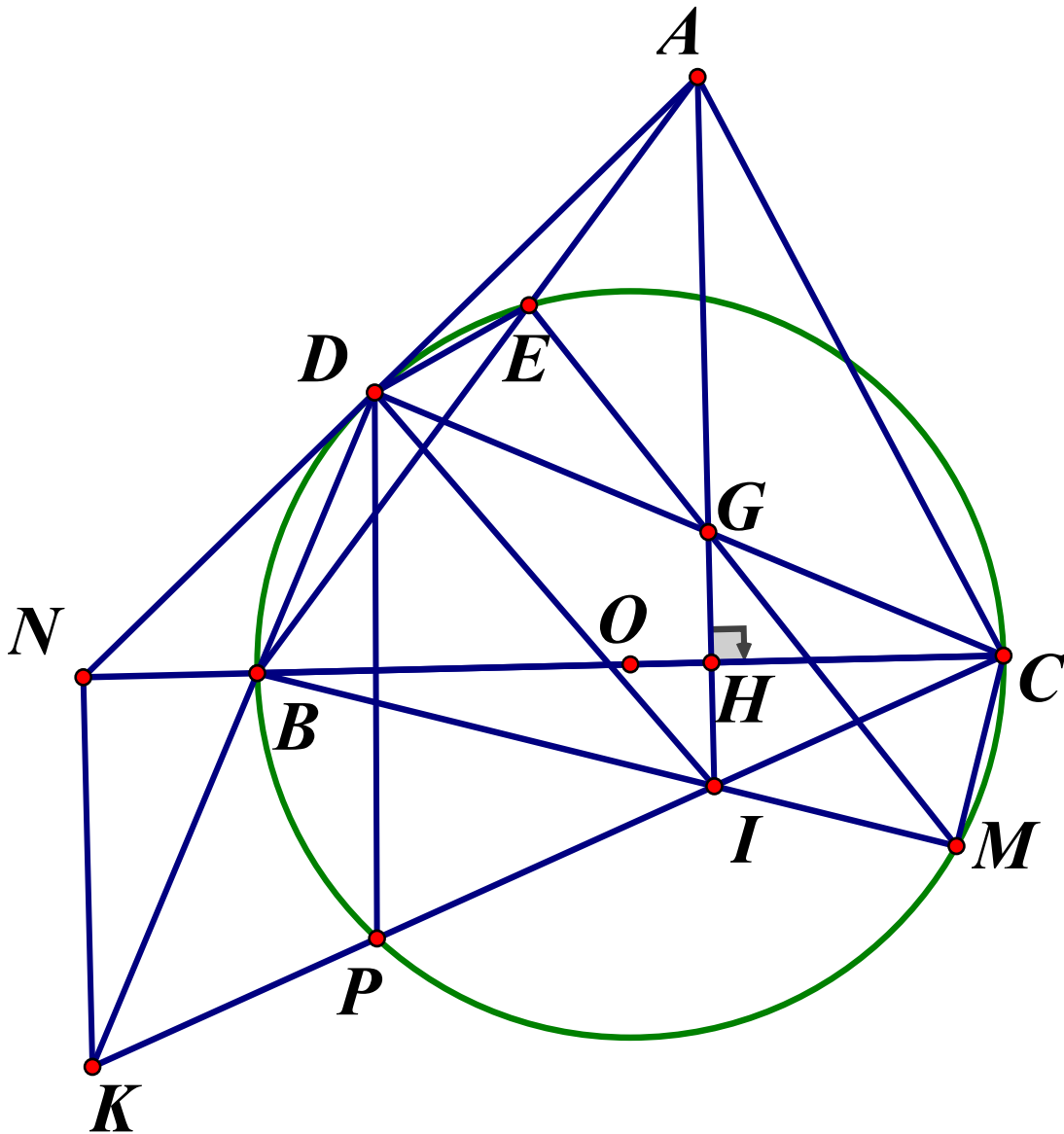
$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \right) + \frac{15}{2t} + \frac{17}{2} \geq 1 + \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 17$$

$$\Rightarrow P \geq 17, \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}z$$

$$\text{Vậy } \min P = 17 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}z$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB tại $E (E \neq B)$. Gọi D là một điểm trên cung nhỏ $BE (D \neq B, D \neq E)$. Hai đường thẳng DC và AH cắt nhau tại G , đường thẳng EG cắt đường tròn (O) tại $M (M \text{ khác } E)$, hai đường thẳng AH và BM cắt nhau tại I , đường thẳng CI cắt đường tròn (O) tại $P (P \text{ khác } C)$



d) Chứng minh tứ giác $DGIP$ nội tiếp

D thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \angle BDC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BDG + \angle BHG = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $BHGD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle HGC = \angle DBH$

$\angle DBC = \angle DPC$ (nội tiếp (O) cùng chắn cung DC) $\Rightarrow \angle HGC = \angle DPI$ nên tứ giác $DGIP$ nội tiếp

e) Chứng minh $GA.GI = GE.GM$

$E \in$ đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \angle BEC = 90^\circ \Rightarrow \angle BAH = \angle BCE$ (cùng phụ với $\angle ABC$); $\angle BME = \angle BCE$ (cùng chắn cung BE) $\Rightarrow \angle EAG = \angle IMG$

Xét $\triangle GIM$ và $\triangle GEA$ có $\angle IGM = \angle EGA$ (đối đỉnh), $\angle EAG = \angle IMG$

$$\Rightarrow \Delta GIM \sim \Delta GEA(g.g) \Rightarrow \frac{GI}{GM} = \frac{GE}{GA} \Rightarrow GI.GA = GE.GM$$

f) Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N , DB và CP cắt nhau tại K .

Chứng minh hai đường thẳng NK và AH song song với nhau

ΔEGD và ΔCGM có $\angle EGD = \angle CGM$ (đối đỉnh), $\angle EDG = \angle CMG$ (cùng chắn

cung EC) $\Rightarrow \Delta EGD \sim \Delta CGM(g.g) \Rightarrow \frac{GE}{GD} = \frac{GC}{GM} \Rightarrow GE.GM = GC.GD$

Lại có $GE.GM = GI.GA \Rightarrow GI.GA = GC.GD \Rightarrow \frac{GI}{GC} = \frac{GD}{GA}$

Xét ΔGAD và ΔGCI có

$$\angle AGD = \angle CGI, \frac{GI}{GC} = \frac{GD}{GA} \Rightarrow \Delta GAD \sim \Delta GCI(c.g.c) \Rightarrow \angle DAG = \angle ICG$$

Xét ΔANH và ΔCKD có $\angle AHN = \angle CDK = 90^\circ$, $\angle NAH = \angle DCI \Rightarrow \angle ANH = \angle DKC$ nên tứ giác $DNKC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle KNC = \angle KDC = 90^\circ$ hay $NK \perp NC$

Mà $AH \perp NC \Rightarrow NK \parallel AH$

Câu 5. (0,5 điểm) Chứng minh rằng trong 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23, bao giờ cũng tìm được hai số khác nhau có tích là số chính phương

Lập 15 nhóm như sau:

Nhóm 1: 1; 4; 9; 16

Nhóm 2: 2; 8; 18

Nhóm 3: 3; 12

Nhóm 4: 5; 20

11 nhóm tiếp theo, mỗi nhóm có 1 số là một trong 11 số không ở nhóm nào trong 4 nhóm trên.

Với 16 số nguyên dương đôi một khác nhau nhỏ hơn 23 được xếp vào 15 nhóm

→ có hai số được xếp vào cùng một nhóm, mà 11 nhóm cuối chỉ có 1 số

→ hai số đó ở cùng một nhóm trong các nhóm từ nhóm 1 đến nhóm 4

⇒ tích của chúng là số chính phương.