

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn: Toán – Lớp: 9

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm: 01 trang)

Câu 1: (3,0 điểm)

1) Cho $P = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} : \left(\frac{a-4}{3(\sqrt{a}-2)} - 1 \right)$ với $a \geq 0; a \neq 1; a \neq 4$

Rút gọn biểu thức P.

2) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-x} + 3\sqrt{z-y} = \frac{1}{2}(z+17)$

Câu 2. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $6x\sqrt{2x^3+7} = 6x^3 + 2x + 22 - 4\sqrt{2x^3+7}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 3x^2 = 2y \\ x^2y + y^2 = -2x \end{cases}$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tính tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn $x^2 + x - a = 0$ với a là số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+y)^2 + y + 3x = z^2 + 1$

Câu 4. (7,0 điểm) Trên đường tròn (O) lấy ba điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC; đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. Qua D kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF cắt đường thẳng AC và AB lần lượt tại Q và R, M là trung điểm của BC.

1) Chứng minh tứ giác BQCR là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh hai tam giác EPM và DEM đồng dạng.

3) Giả sử BC là dây cung cố định không đi qua tâm O, A di động trên cung lớn BC của đường tròn (O). Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Cho 2021 số tự nhiên từ 4 đến 2024 trên bảng, mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó cho đến khi trên bảng chỉ còn lại các số từ 1 đến 9. Hỏi cuối cùng, trên bảng có bao nhiêu số 3, bao nhiêu số 7?

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz + 2(x+y+z)^2}{xy + yz + zx} - \frac{8}{xy + yz + zx + 1}$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....Ký tên:.....

Họ, tên và chữ ký của GT 1:.....Họ, tên và chữ ký của GT 2:.....

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – NAM ĐỊNH (2020 – 2021)

Câu 1.

1) Ta có:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1} = \sqrt{a}-1$$

$$\frac{a-4}{3(\sqrt{a}-2)} - 1 = \frac{\sqrt{a}-1}{3}$$

$$\text{Suy ra: } P = 2 - \sqrt{3} + (\sqrt{a}-1) : \frac{\sqrt{a}-1}{3} = 5 - \sqrt{3}$$

$$2) \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y-x \geq 0 \text{ hay } 0 \leq x \leq y \leq z \\ z-y \geq 0 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-x} + 3\sqrt{z-y} = \frac{1}{2}(z+17)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y-x} + 6\sqrt{z-y} = z+17$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 4\sqrt{y-x} + 6\sqrt{z-y} = z-y+9+y-x+4+x+4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{z-y}-3)^2 + (\sqrt{y-x}-2)^2 + (\sqrt{x}-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{y-x} = 2 \\ \sqrt{z-y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \text{ (thỏa mãn)} \\ z = 17 \end{cases}$$

Kết luận: $x=4, y=8, z=17$

Câu 2.

$$1) \text{ Điều kiện: } x \geq \sqrt[3]{-\frac{7}{2}}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x^3+7} \text{ (} t \geq 0 \text{)}$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$(6x+4)t = 3(t^2-7) + 2x+22$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 2(3x+2)t + 2x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

TH1: $t = 2x+1$. Ta có:

$$\sqrt{2x^3 + 7} = 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x-1)(x^2 - x - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

TH2: $t=1/3$ ta có $\sqrt{2x^3 + 7} = 1/3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{31}{9}}$

Vậy phương trình có 3 nghiệm: $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$, $x = 1$, $x = \sqrt[3]{-\frac{31}{9}}$

2) Nếu $x = 0$ tính được $y = 0$

Nếu $y = 0$ tính được $x = 0$

Do đó ta được $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Với x và y khác 0. Hệ tương đương:
$$\begin{cases} xy + 3\frac{x^2}{y} = 2 \\ xy + \frac{y^2}{x} = -2 \end{cases}$$

Đặt: $a = \frac{x^2}{y}$, $b = \frac{y^2}{x}$. Ta được:
$$\begin{cases} ab + 3a = 2 \\ ab + b = -2 \end{cases}$$

Giải hệ trên suy ra: $(a; b) = (1; -1) = (-2/3; -6)$

TH1: với $a=1$; $b=-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 1 \\ \frac{y^2}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

TH 2: với $a=-2/3$; $b=-6$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = -2/3 \\ \frac{y^2}{x} = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{9} \\ y = -2\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Kết luận: vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm là $(0; 0)$, $(-1; 1)$, $(-\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}; -2\sqrt[3]{3})$

Câu 3.

1) Từ giả thiết suy ra $a = x^2 + x$ hay $a = x(x+1)$ mà x và $x+1$ là hai số nguyên liên tiếp nên $x(x+1)$ là số chẵn, do đó a là số chẵn.

Mặt khác a là số nguyên tố nên $a = 2$

Khi đó ta được: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

KL: tổng tất cả các số nguyên x thỏa mãn là $1 - 2 = -1$

2) Ta có: $(x + y)^2 + y + 3x = z^2 + 1 \Leftrightarrow (x + y)^2 + 3x + y - 1 = z^2$ (*)

Mà $3x + y - 1 > 0$ với mọi x, y nguyên dương $\Rightarrow z^2 > (x + y)^2$ (1)

Ta lại có:

$$\begin{aligned} (x + y + 2)^2 - z^2 &= (x + y + 2)^2 - (x + y)^2 - 3x - y + 1 \\ &= (x + y)^2 + 4(x + y) + 4 - (x + y)^2 - 3x - y + 1 \\ &= x + 3y + 5 > 0 \end{aligned}$$

Nên $(x + y + 2)^2 > z^2$ (2)

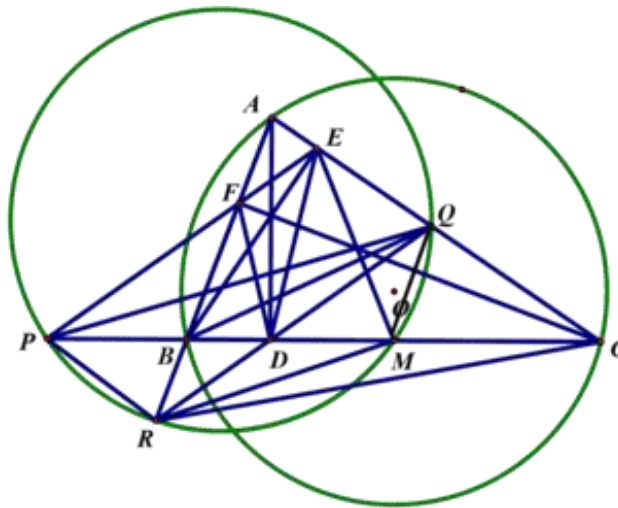
Từ (1) và (2) suy ra: $(x + y + 1)^2 = z^2$

Thay vào (*) ta được: $(x + y)^2 + 3x + y - 1 = (x + y + 1)^2 \Leftrightarrow x = y + 2$

Khi đó $z = 2y + 3$

Vậy tất cả các nghiệm nguyên dương (x; y; z) của phương trình có dạng $(k + 2; k; 2k + 3)$ với k là số nguyên dương.

Câu 4.



1) Chứng minh tứ giác BCEF là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{BCQ}$

Chỉ ra $\widehat{AFE} = \widehat{BRQ}$

Suy ra $\widehat{BRQ} = \widehat{BCQ}$

Chỉ ra tứ giác BQCR nội tiếp

2) Chỉ ra tam giác ECM cân tại M

Chứng minh được $\widehat{EMD} = 2\widehat{ACB}$

Tứ giác BCEF; ACDF nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB} = \widehat{BFD}$

Suy ra $\widehat{EMD} = 2\widehat{ACB} = \widehat{AFE} + \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{EMD} + \widehat{DFE} = 180^\circ$

Chỉ ra tứ giác DMEF nội tiếp, suy ra $\widehat{BDF} = \widehat{PEM}$

Mà $\widehat{BDF} = \widehat{BAC} = \widehat{MDE}$ nên $\widehat{MDE} = \widehat{PEM}$. Suy ra tam giác EPM và DEM đồng dạng

3) Do tứ giác DMEF nội tiếp, suy ra $\widehat{PFD} = \widehat{EMD}$

Mà $\widehat{PDF} = \widehat{EDM}$ nên tam giác PFD đồng dạng với tam giác EMD suy ra $\frac{PD}{DF} = \frac{ED}{MD}$

Do $\widehat{RFD} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{FRD}$ nên tam giác FDR cân tại D suy ra $FD = DR$

Chứng minh tương tự tam giác DEQ cân tại D nên $DE = DQ$.

Ta có: $FD = DR; DE = DQ$ suy ra $\frac{PD}{DR} = \frac{DQ}{MD}$

Chỉ ra hai tam giác PDR và QDM đồng dạng, suy ra $\widehat{PRQ} = \widehat{PMQ}$

Chỉ ra tứ giác PRMQ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua điểm M cố định

Câu 5.

Một số chia cho 9 dư k thì tổng các chữ số của nó chia 9 cũng dư k

Do đó sau khi thay đủ số lần, mà mỗi lần thay một hoặc một vài số bởi tổng các chữ số của nó thì cuối cùng trên bảng chỉ còn lại các số dư k tương ứng của các số đã cho.

Các số chia 9 dư 3 trong dãy từ 4 đến 2024 là: 12; 21; 30; ... ; 2019

Dãy số trên có $\frac{2019-12}{9} + 1 = 224$ (số), do đó trên bảng có 224 số 3

Các số chia 9 dư 7 trong dãy từ 4 đến 2024 là: 7; 16; 25; ... ; 2023.

Dãy số trên có $\frac{2023-7}{9} + 1 = 225$ (số), do đó trên bảng có 225 số 7

Vậy cuối cùng trên bảng có 224 số 3, có 225 số 7.

Câu 6.

Ta có $x^3 + 8 + 8 \geq 2\sqrt[3]{x^3 \cdot 8 \cdot 8} = 12x$ hay $x^3 + 16 \geq 12x$

Tương tự $y^3 + 16 \geq 12y$, $z^3 + 16 \geq 12z$

Cộng vế ba bất đẳng thức trên ta được $12(x + y + z) \leq x^3 + y^3 + z^3 + 48 = 72 \Rightarrow x + y + z \leq 6$

Có $24 = x^3 + y^3 + z^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot z^3} = 3xyz \Rightarrow xyz \leq 8$

Ta lại có:

$$24 - 3xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\leq 6(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\Rightarrow 8 - xyz \leq 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 2((x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx))$$

$$\Rightarrow xyz + 2(x + y + z)^2 \geq 8 + 6(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 8 + 6(xy + yz + zx) \leq xyz + 2(x + y + z)^2 \leq 8 + 2 \cdot 6^2 = 80$$

$$\Rightarrow 0 < xy + yz + zx \leq 2$$

$$\text{Có: } M \geq \frac{8 + 6(xy + yz + zx)}{xy + yz + zx} - \frac{8}{xy + yz + zx + 1} = 6 + \frac{8}{t} - \frac{8}{t + 1} = f(t)$$

Với $t = xy + yz + zx; 0 < t \leq 12$

$$\text{Khi đó } f(t) = 6 + \frac{8}{t(t+1)} \geq 6 + \frac{8}{12(12+1)} = \frac{236}{39}$$

Kết luận: giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 236/39 khi $x = y = z = 2$.