

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$.

a) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(3;5)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các tia Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 30.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$y^2(x-4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0.$$

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 3\sqrt{x^2+2x-3} = 5x-3$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{xy+3x-6y-18}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) \end{cases}.$$

Câu 4 (2,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm và HG song song với BC . Tính $\tan B, \tan C$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Lấy điểm H cố định thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng với O và A). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C . Gọi D là điểm đối xứng với A qua C ; I, J lần lượt là trung điểm của CH và DH .

a) Chứng minh hai tam giác CHJ và HBI đồng dạng.

b) Gọi Bx là tia tiếp của nửa đường tròn tâm O . Lấy điểm E di động trên Bx (E không trùng với B). Đường thẳng qua H vuông góc với AE cắt đường thẳng BE tại F . Chứng minh đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định khi E di động trên tia Bx .

Câu 6 (2,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

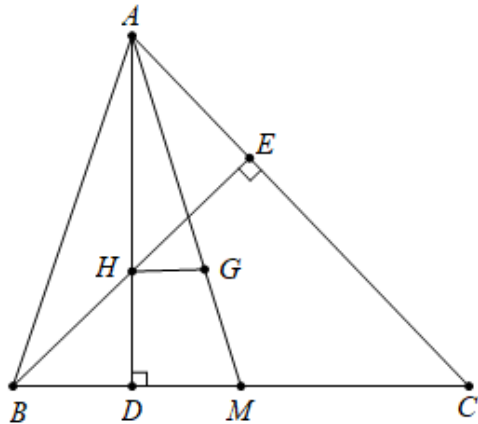
Chữ ký của giám thị:

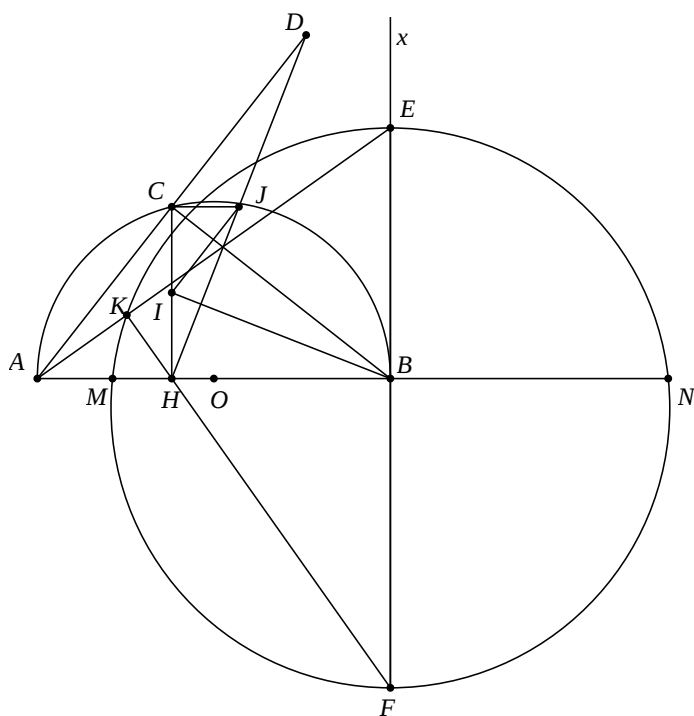
HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+7}{x-4\sqrt{x}+3} \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 1, x \neq 9$.	
	a) Rút gọn và tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.	2,0
	Ta có $A = \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \right] : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	$= \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \right] : \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	$= \frac{x-9-x+1+\sqrt{x}+7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+1)$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 - \sqrt{3}$	0,5
	$\Rightarrow A = \frac{2 - \sqrt{3} + 1}{2 - \sqrt{3} - 3} = \frac{\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} + 1} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{2} = 3 - 2\sqrt{3}$	0,5
	b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$.	2,0
	Theo câu a) ta có: $\frac{1}{A} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+1}$	0,5
Câu 2 (4,0 điểm)	Do $\sqrt{x}+1 \geq 1, \forall x \geq 0$ nên $-\frac{4}{\sqrt{x}+1} \geq -4, \forall x \geq 0$ Suy ra $\frac{1}{A} \geq -3, \forall x \geq 0$	0,5
	Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ (thỏa mãn)	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{A}$ bằng -3 khi $x = 0$.	0,5
	a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(3;5)$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua M và cắt các tia Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 30.	2,0
	Phương trình đường thẳng $(d): y = m(x-3) + 5 \Leftrightarrow y = mx - 3m + 5$	0,25
	$(d) \cap Ox = A \Rightarrow A\left(\frac{3m-5}{m}; 0\right)$	0,25
	$(d) \cap Oy = B \Rightarrow B(0; 5-3m)$	0,25
	Điều kiện để d cắt các tia Ox, Oy tại hai điểm A, B phân biệt là: $m < 0$.	0,25
	$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30 \Leftrightarrow \frac{(3m-5)^2}{ m } = 60 \Leftrightarrow (3m-5)^2 = -60m$ (do $m < 0$)	0,5

	$\Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy phương trình đường thẳng d là $y = -\frac{5}{3}x + 10$.	0,25
	b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y^2(x-4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0.$	2,0
	Ta có $y^2(x-4)^2 - x^3 + 10x^2 - 32x + 14 = 0$ $\Leftrightarrow y^2(x-4)^2 - (x^3 - 10x^2 + 32x - 32) = 18$	0,25
	$\Leftrightarrow y^2(x-4)^2 - (x-4)^2(x-2) = 18$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-4)^2(y^2 - x + 2) = 18$ ($18 = 1^2 \cdot 18 = 3^2 \cdot 2$)	0,25
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên xảy ra các trường hợp sau +) $\begin{cases} (x-4)^2 = 1^2 \\ y^2 - x + 2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y^2 = 19 \text{ (l)} \\ x = 5 \Rightarrow y^2 = 21 \text{ (l)} \end{cases}$	0,5
	+) $\begin{cases} (x-4)^2 = 3^2 \\ y^2 - x + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \Rightarrow y^2 = 7 \text{ (l)} \\ x = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \text{ (tm)} \end{cases}$	0,5
	Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 1), (1; -1)$	0,25
Câu 3 (4,0 điểm)	a) Giải phương trình $3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 3\sqrt{x^2+2x-3} = 5x-3$.	2,0
	Điều kiện: $x \geq 1$	0,25
	Đặt $t = 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} \Rightarrow \frac{t^2}{2} = 5x-3-3\sqrt{x^2+2x-3}$	0,25
	Phương trình trở thành: $t = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$	0,25
	Với $t = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x-1} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)	0,25
	Với $t = 2 \Rightarrow 3\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x+3}$	0,25
	$\Leftrightarrow 9(x-1) = 4 + 4\sqrt{x+3} + x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x-4$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+3 = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{13}{4} \right\}$	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{xy-2x+y-2} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2} & (1) \\ \frac{xy+3x-6y-18}{x^2-6x+12} = (y-3)(\sqrt{x+3}-3) & (2) \end{cases}$	2,0
	Điều kiện: $x \geq -1; y \geq 2$. Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x+5 = 2y + \sqrt{y-2}$ Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{y-2} = b$ ($a, b \geq 0$)	0,25

	Ta có: $a + ab + a^2 - 1 + 5 = 2(b^2 + 2) + b \Leftrightarrow a - b + ab - b^2 + a^2 - b^2 = 0$ $\Leftrightarrow (a - b)(1 + a + 2b) = 0$ $\Leftrightarrow a = b \text{ (do } a, b \geq 0 \Rightarrow 1 + a + 2b > 0)$	0,25
	$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow y = x + 3.$	0,25
	Thay vào (2) ta được $\frac{x(x+3) + 3x - 6(x+3) - 18}{x^2 - 6x + 12} = x(\sqrt{x+3} - 3)$ $\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 3x - 6x - 18 - 18}{x^2 - 6x + 12} = \frac{x(x-6)}{\sqrt{x+3} + 3}$ $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 36}{x^2 - 6x + 12} = \frac{x(x-6)}{\sqrt{x+3} + 3}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \frac{x+6}{x^2 - 6x + 12} = \frac{x}{\sqrt{x+3} + 3} (*) \end{cases}$ + Với $x = 6 \Rightarrow y = 9$.	0,5
	+ (*) $\Leftrightarrow (x+6)(\sqrt{x+3} + 3) = x(x^2 - 6x + 12)$ $\Leftrightarrow [(x+3)+3](\sqrt{x+3} + 3) = [(x-3)+3][(x-3)^2 + 3] (**)$ Đặt $\sqrt{x+3} = u, x-3 = v (u \geq 0)$; u, v không đồng thời bằng 0. Từ (**) ta có: $(u+3)(u^2 + 3) = (v+3)(v^2 + 3)$ $\Leftrightarrow (u^3 - v^3) + 3(u - v) + 3(u^2 - v^2) = 0$ $\Leftrightarrow (u - v)[(u^2 + uv + v^2) + 3 + 3(u + v)] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ (u^2 + uv + v^2) + 3 + 3(u + v) = 0 \end{cases}$	0,25
	+) $u = v \Rightarrow \sqrt{x+3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow y = 9.$	0,25
	+) $(u^2 + uv + v^2) + 3 + 3(u + v) = 0 \Leftrightarrow v^2 + (u+3)v + u^2 + 3u + 3 = 0$ (vô nghiệm). Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (6; 9)$.	0,25
Câu 4 (2,0)	Cho tam giác nhọn ABC có H, G lần lượt là trực tâm, trọng tâm và HG song song với BC. Tính $\tan B, \tan C$.	2,0

điểm)		
	Gọi AD, AM lần lượt là đường cao và đường trung tuyến của $\triangle ABC$ $\triangle ABD$ vuông tại D nên $\tan B = \frac{AD}{BD}$	0,25
	$\triangle ACD$ vuông tại D nên $\tan C = \frac{AD}{CD}$	0,25
	Suy ra: $\tan B \cdot \tan C = \frac{AD^2}{BD \cdot CD}$ (1)	0,25
	Ta có: hai tam giác BDH và ADC đồng dạng	0,25
	Suy ra $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DH} \Rightarrow BD \cdot CD = AD \cdot DH$ (2)	0,25
	Lại có: $HG \parallel DM \Rightarrow \frac{HD}{AD} = \frac{MG}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = 3DH$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\tan B \cdot \tan C = 3$	0,5
Câu 5 (4,0 điểm)	Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là điểm thuộc đoạn thẳng OA (H không trùng với O và A). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tâm O tại C. D là điểm đối xứng với A qua C; I, J lần lượt là trung điểm của CH và DH.	
	a) Chứng minh hai tam giác CHJ và HBI đồng dạng.	2,0



Ta thấy $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$

Từ giả thiết $\left. \begin{array}{l} IC = IH \\ JH = JD \end{array} \right\} \Rightarrow IJ // AD$

0,5

$$\Rightarrow IJ \perp BC \Rightarrow CIJ = CBH \text{ (cùng phụ với góc } HCB) \quad (1)$$

0,25

Trong tam giác vuông BCH ta có: $\tan CBH = \frac{CH}{HB}$ (2)

0,25

Trong tam giác vuông CIJ ta có: $\tan CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ (3)

0,25

$$\text{Tr (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI} \Rightarrow \frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI} \quad (4)$$

0,25

Từ giả thiết $\left. \begin{array}{l} CA = CD \\ JH = JD \end{array} \right\} \Rightarrow CJ // BC \Rightarrow CJ \perp CH \Rightarrow \Delta H CJ \text{ vuông tại } C$

0,25

Xét hai tam giác vuông CHJ và HBI có $\frac{CH}{CJ} = \frac{HB}{HI}$

0,25

Vậy $\triangle CHJ$ và $\triangle HBI$ đồng dạng (c.g.c)

b) Gọi Bx là tia phân giác của nửa đường tròn tâm O . Lấy điểm E di động trên Bx . Đường thẳng qua H vuông góc với AE cắt đường thẳng BE tại F . Chứng minh đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định khi E di động trên tia Bx .

2,0

Gọi giao điểm của đường tròn đường kính EF với đường thẳng AB là M, N (M nằm giữa A và B). K là giao điểm của HF và AE .
 Vì đường kính EF vuông góc với $MN \Rightarrow M, N$ đối xứng qua B .

0,25

Ta có $EKH = EBH = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BEKH$ nội tiếp

Nên $KEH = KBH$ (góc nội tiếp chắn cung KH)

$$\text{Suy ra } \triangle AEH \sim \triangle ABK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow AE \cdot AK = AH \cdot AB \quad (1)$$

0.5

	Tứ giác $EKMN$ nội tiếp $KEN + KMN = 180^\circ$ Mà $AMK + KMN = 180^\circ$ (kề bù) Do đó : $KEN = AMK \Rightarrow \triangle AKM \sim \triangle ANE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{AN} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow AK.AE = AM.AN$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AM.AN = AH.AB = a$ cố định	0,5
	Ta có: $a = AM.AN = (AB - MB)(AB + NB) = AB^2 - MB^2$ do $MB = NB$ $\Rightarrow MB^2 = AB^2 - a = k > 0$ (cố định) $\Rightarrow BM = BN = \sqrt{k}$ cố định	0,5
	Suy ra 2 điểm M, N cố định. Vậy đường tròn đường kính EF luôn đi qua hai điểm cố định M, N.	0,25
Câu 6 (2,0 điểm)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024$.	2,0
	Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$	0,25
	Mặt khác $(a + b + c)^2 = 9 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 9$ $\Leftrightarrow ab + bc + ca = \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$	0,5
	Khi đó $A = 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{4 \cdot \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} + 2024$ $= 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} - 2 + 2024$ $= 12(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 2022$ $= 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{18}{a^2 + b^2 + c^2} + 10(a^2 + b^2 + c^2) + 2022$	0,5
	Do đó $A \geq 2\sqrt{2.18} + 10.3 + 2022 = 12 + 30 + 2022 = 2064$	0,25
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2064 khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0,25

-----**HẾT**-----