

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(1 - \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right) \left(1 - \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}\right) \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

b) Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = (a - 2)x + b (a \neq 2)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 4m + 1 = 0$ (1) (m là tham số)

a) Tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1(3x_2 + 5x_1) + x_2(3x_1 + 5x_2)} - 3 = 5$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 6y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0 \\ 2x^3 - 7y = 9 \end{cases}$

b) Trong đợt dịch Covid – 19, theo kế hoạch thì hai tổ I và II của công ty may X phải sản xuất 1000 khẩu trang y tế trong thời gian hai ngày để kịp thời cung cấp cho người dân. Do được cải tiến kỹ thuật nên tổ I làm vượt mức 15% và tổ hai vượt mức 20% so với kế hoạch ban đầu của mỗi tổ. Vì vậy, sau hai ngày họ đã làm được nhiều hơn 1700 khẩu trang so với kế hoạch. Tính số khẩu trang làm được của mỗi tổ sau khi cải tiến kỹ thuật.

Câu 4. (3,0 điểm)

Từ điểm A bên ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên cung nhỏ BC lấy điểm I (I không trùng với B, C). Gọi M, N, P thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ I đến các đường thẳng BC, CA và AB

a) Chứng minh tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh $IM^2 = IN \cdot IP$

c) Gọi giao điểm của BI và MP là E , giao điểm của CI và MN là F . Chứng minh $IM \perp EF$

Câu 5. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z là nghiệm của phương trình

$x^3(y^3 + z^3) = 2020(xyz + 2)$, biết rằng $x > 1$ và $y + z$ chia hết cho 101

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1}\right) = (1-\sqrt{x})^2$$

b) (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $-\sqrt{2} \Rightarrow b = -\sqrt{2} \Rightarrow (d): (a-2)x - \sqrt{2}$
(d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$ nên, ta có:

$$(a-2)\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a-2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = 3 \text{ (tmdk)}$$

Vậy $a = 3, b = -\sqrt{2}$

Câu 2.

a) Để phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (-m)^2 - (m^2 - 4m + 1) = 4m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$$

Vậy $m > \frac{1}{4}$

b) Với điều kiện $m > \frac{1}{4}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Vi – et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 4m + 1 \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{aligned} x_1(3x_2 + 5x_1) + x_2(3x_1 + 5x_2) - 3 &= 5(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 3 \\ &= 5(2m)^2 - 4(m^2 - 4m + 1) - 3 = 16m^2 + 16m - 7 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x_1(3x_2 + 5x_1) + x_2(3x_1 + 5x_2) - 3} = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 16m - 7} = 5 \Leftrightarrow 16m^2 + 16m - 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy $m = 1$

Câu 3.

a) $x^2 - 6y^2 - xy + 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2-y)x - 6y^2 - y + 1 = 0(I)$

Xem (I) là phương trình bậc hai theo x , ta có:

$\Delta = (2 - y)^2 - 4 \cdot (-6y^2 - y + 1) = 25y^2$. Vì vậy, phương trình (I) có hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-(2-y) + \sqrt{25y^2}}{2} \\ x_2 = \frac{-(2-y) - \sqrt{25y^2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 1 \\ x = -2y - 1 \end{cases}$$

Th1: $x = 3y - 1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$2(3y - 1)^3 - 7y = 9 \Leftrightarrow 2(27y^3 - 27y^2 + 9y - 1) - 7y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 27y^2(y - 1) + 11(y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(54y^2 + 11) = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$$

Th2: $x = -2y - 1$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$2(-2y - 1)^3 - 7y = 9 \Leftrightarrow -2(8y^3 + 12y^2 + 6y + 1) - 7y - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16y^3 + 24y^2 + 19y + 11 = 0 \Leftrightarrow 16y^3 + 16 + 24y^2 - 24 + 19y + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16(y + 1)(y^2 - y + 1) + 24(y + 1)(y - 1) + 19(y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)(16y^2 - 16y + 16 + 24y - 24 + 19) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 1)(16y^2 + 8y + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ 16y^2 + 8y + 11 = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow y = -1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (1; -1)\}$

b) Gọi $x, y (x, y \in \mathbb{N}^*)$ lần lượt là số khẩu trang dự định may ban đầu của tổ I và II. Ta

$$\text{có: } x + y = 10000$$

Sau khi cải tiến kỹ thuật, ta có: $\frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700$

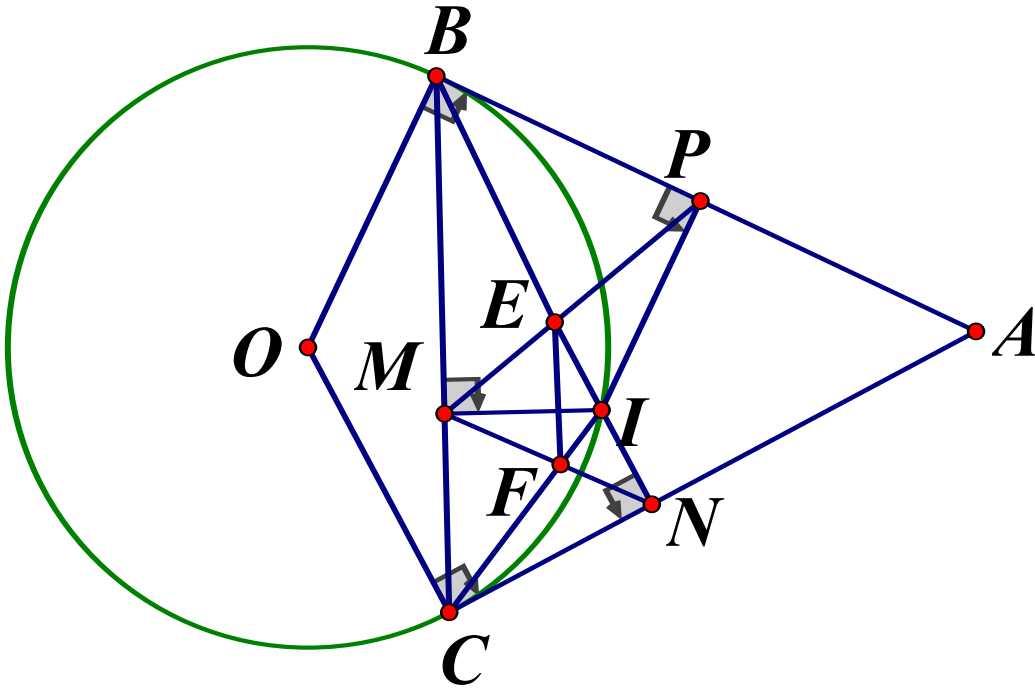
$$\text{Ta được hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 10000 \\ \frac{15}{100}x + \frac{20}{100}y = 1700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6000 \\ y = 4000 \end{cases} (tm)$$

Số sản phẩm làm được khi thay thiết bị mới:

$$+) \text{ của tổ I: } \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot 6000 = 6900 (\text{khẩu trang})$$

$$+) \text{ của tổ II là } \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot 4000 = 4800 (\text{khẩu trang})$$

Câu 4.



a) Ta có: $\angle BPI = \angle BMI = 90^\circ$.

Do đó tứ giác $BMIP$ nội tiếp đường tròn đường kính BI

b) $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có tứ giác $CMIN$ nội tiếp đường tròn đường kính CI

$$\Rightarrow \angle MIP = 180^\circ - \angle MBP = 180^\circ - \angle MCN = \angle MIN$$

$$\angle PBI = \angle PMI \text{ (cùng chắn cung } IP \text{ của đường tròn đường kính } BI)$$

$$\angle MCI = \angle MNI \text{ (cùng chắn cung } IM \text{ của đường tròn đường kính } CI)$$

$$\angle PBI = \angle BCI = \angle MCI \text{ (cùng chắn cung } IB \text{ của đường tròn } (O))$$

$$\Rightarrow \angle PMI = \angle PBI = \angle MCI = \angle MNI$$

Do đó $\triangle IMP \sim \triangle INM$ (vì $\angle MIP = \angle MIN$; $\angle PMI = \angle MNI$)

$$\Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{IP}{IM} \Rightarrow IM^2 = IN \cdot IP$$

c) Ta có: $\angle PMI = \angle MCI$ (cmt), chứng minh tương tự: $\angle IBM = \angle IMN$

$$\text{Mà } \angle IBM + \angle MCI + \angle BIC = 180^\circ \Rightarrow \angle PMI + \angle IMN + \angle BIC = 180^\circ$$

Hay $\angle EMF + \angle EIF = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $EMFI$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{EMI} \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung } EI) \Rightarrow \widehat{EFI} = \widehat{MCI} (= \widehat{EMI})$$

Mà $\widehat{EFI}$ và $\widehat{MCI}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow EF // BC$

Theo giả thiết $IM \perp BC \Rightarrow IM \perp EF$

Câu 5.

Vì $2^3 \cdot 5 \cdot 101 = x^3 \cdot (y^3 + z^3) - 2020xyz = x \left[x^2(y^3 + z^3) - 2020yz \right]$ nên x không thể có ước số nào ngoài các số có thể là 2; 5; 101

Vì $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ nên ta có các lập luận sau:

- Nếu $x:5$ (hoặc $x:101$) thì $x^3:5^3$ (hoặc $x^3:101^3$) nhưng $2020(xyz + 2) \not\equiv 5^3$ (hoặc $2020(xyz + 2)$ không chia hết cho 101^3)
- Nếu $x = 2^2$ thì $x^3:2^3$ nhưng $2020(xyz + 2) = 2^3 \cdot 5 \cdot 101(2yz + 1)$ không chia hết cho 2^6 . Từ những lập luận trên, ta suy ra $x = 1(ktm); x = 2$

Khi $x = 2$ ta được phương trình $y^3 + z^3 = 5 \cdot 101 \cdot (yz + 1)$ (*)

Đặt $y + z = 101k$, k là số nguyên dương sẽ tìm sau.

Từ $y^3 + z^3 = (y + z) \left[(y - z)^2 + yz \right]$ ta được:

$$5 \cdot 101(yz + 1) = 101k \left[(y - z)^2 + yz \right] \Leftrightarrow k(y - z)^2 + (k - 5)yz = 5 (**)$$

Từ trên ta suy ra $(k - 5)yz \leq 5$, do đó: $k \leq 5$

Thật vậy, nếu $k > 5 \Rightarrow 1 \leq (k - 5)yz \leq 5 \Rightarrow y, z \leq 5 \Rightarrow y + z < 101$ (mâu thuẫn)

Ta xét các trường hợp $0 < k \leq 5$

Từ (*) ta suy ra được $y^3 + z^3 : 5 \Rightarrow y + z : 5$

Nếu y, z cùng chia hết cho 5 thì $y^3 + z^3 : 5^3$

Trong khi đó $5 \cdot 101(yz + 1) = 5 \cdot 101 \cdot yz + 5 \cdot 101$ không chia hết cho 5^3

Do đó cả hai số y, z đều không chia hết cho 5

$$\text{Ta có: } k(y - z)^2 + (k - 5)yz = 5 \Leftrightarrow -3kyz = -k(y + z)^2 + 5yz + 5$$

Vì y không chia hết cho 5, z không chia hết cho 5 nên $k:5$

$$\text{Với } k = 5, \text{ thay vào } (**) \text{ ta được } 5(y - z)^2 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Ta được các hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = 505 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 253 \\ z = 252 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - z = -1 \\ y + z = 505 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 252 \\ z = 253 \end{cases}$$

Vậy $(x; y; z) = \{(2; 252; 253); (2; 253; 252)\}$