

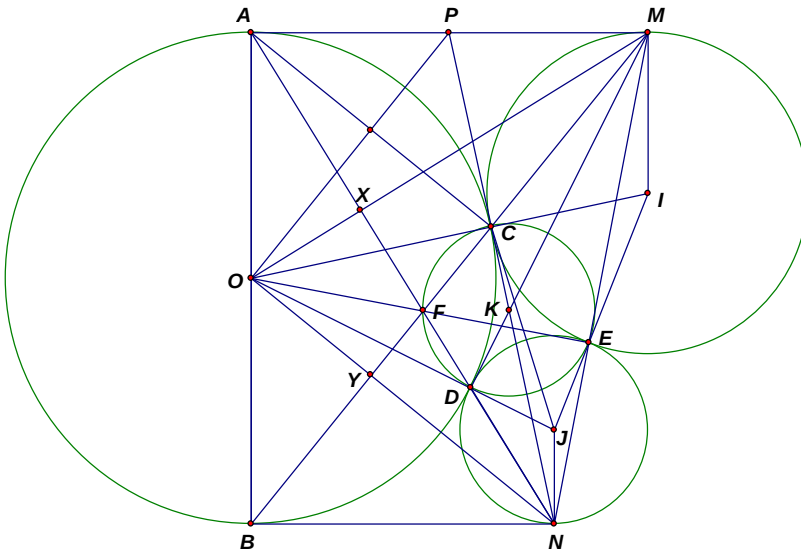
ĐÁP ÁN- TOÁN
Ngày thi: 6/10/2022

Bài 5. (6.0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại C và nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC tại M . Các tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại N . Đường thẳng AN cắt lại đường tròn (O) tại D khác A và cắt đường thẳng BC tại F . Đường thẳng qua M , song song với AB cắt đường thẳng OC tại I . Đường thẳng qua N , song song với AB cắt đường thẳng OD tại J . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng MD, NC và E là giao điểm của hai đường thẳng MN, IJ .

a) Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MCE và NDE tiếp xúc với nhau.

b) Chứng minh rằng K là tâm đường tròn đi qua các điểm C, D, E, F .



a) Gọi P là giao điểm của AM và NC thì $PA = PM = PC$.

Ta có $\triangle OPN$ vuông tại O , đường cao OC nên suy ra

$$OC^2 = CP.CN = AP.BN = OB^2 \Rightarrow 2OB.OC = BN.2AP \\ \Rightarrow OA.AB = BN.AM$$

$$\Rightarrow \triangle AOM \sim \triangle BNA$$

$$\Rightarrow \angle AMO = \angle BAN = \angle ADO$$

Suy ra tứ giác $AMDO$ nội tiếp đường tròn đường kính OM nên
 $\angle ODM = \angle OAM = 90^\circ$

Do đó MD là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow KC = KD$

Vì $\triangle OBC \sim \triangle ICM$ và $\triangle OAD \sim \triangle JDN$ nên suy ra $IC = IM$ và $JD = JN$

Mặt khác ta có $OM \perp AN$ tại X và $ON \perp BM$ tại Y nên F là trực tâm của $\triangle OMN$.

Gọi E' là giao điểm của OF và MN thì $OE' \perp MN$. Ta chứng minh $E' \equiv E$.

Ta có $MA^2 = MD^2 = \overline{MX} \cdot \overline{MO} = \overline{ME'} \cdot \overline{MN} = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$

Xét phép nghịch đảo f cực M , phương tích $k = MA^2$ ta có: f biến các điểm B, N thành các điểm C, E' tương ứng

Suy ra f biến đường thẳng BN thành đường tròn (MCE')

Vì BN tiếp xúc với (O) tại B và $BN \parallel AM$ nên đường tròn (MCE') tiếp xúc với (O) tại C và tiếp xúc với AM tại M . Do đó I là tâm đường tròn (MCE')

Chúng minh tương tự ta có J là tâm đường tròn (NDE') .

Khi đó ta suy ra hai đường tròn (MCE') và (NDE') tiếp xúc nhau tại E' .

$\Rightarrow E'$ là giao điểm của IJ và MN nên $E' \equiv E$

Vậy hai đường tròn (MCE) và (NDE) tiếp xúc với nhau tại E .

b) Vì KC là tiếp tuyến chung của (O) và (I) ; KD là tiếp tuyến chung của (O) và (J) nên ta suy ra $P_{K/(I)} = P_{K/(O)} = P_{K/(J)}$, do đó K là tâm đẳng phương của 3 đường tròn $(O), (I), (J) \Rightarrow KC = KD = KE$. Suy ra K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle CDE$ (1).

Mặt khác ta có $MA^2 = MD^2 = \overline{MX} \cdot \overline{MO} = \overline{ME} \cdot \overline{MN} = \overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{MF} \cdot \overline{MY}$ nên phép nghịch đảo f cực M , phương tích $k = MA^2$ biến các điểm F, C, D, E tương ứng thành các điểm Y, B, D, N .

Mà 4 điểm Y, B, D, N cùng thuộc đường tròn đường kính BN nên 4 điểm F, C, D, E cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1) và (2) suy ra K là tâm đường tròn đi qua 4 điểm F, C, D, E .

Bài 6.(7,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y^4) = f(x) + yf(y^3), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Cho $x=0, y=1$, từ (1) suy ra $f(0)=0$

Cho $x=0$, từ (1) suy ra

$$\begin{aligned} f(y^4) &= yf(y^3), \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow -yf((-y)^3) = f((-y)^4) = f(y^4) = yf(y^3), \forall y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(-y^3) &= -f(y^3), \forall y \neq 0 \end{aligned}$$

Vậy f là hàm số lẻ.

Phương trình hàm đã cho được viết lại như sau

$$f(x+y^4) = f(x) + f(y^4), \forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ suy ra}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0 \quad (1.1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(-(-x-y)) = -f((-x)+(-y)) = -(f(-x) + f(-y)) \\ &= -(-f(x) - f(y)) = f(x) + f(y), \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \leq 0 \quad (1.2)$$

Kết hợp (1.1) và (1.2) ta được $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bây giờ ta tính $f((x+1)^4 + (x-1)^4)$ theo hai cách như sau

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f((x+1)^4 + (x-1)^4) &= f(2x^4 + 12x^2 + 2) = 2f(x^4) + 12f(x^2) + 2f(1) \\ &= 2xf(x^3) + 12f(x^2) + 2f(1) \quad (1.3) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} f((x+1)^4 + (x-1)^4) &= f((x+1)^4) + f((x-1)^4) \\ &= (x+1)f((x+1)^3) + (x-1)f((x-1)^3) \\ &= (x+1)f(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (x-1)f(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\ &= 2xf(x^3) + 6f(x^2) + 6xf(x) + 2f(1) \quad (1.4) \end{aligned}$$

So sánh (1.3) với (1.4) ta có $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.5)$. Tiếp tục thay x bởi $x+1$ vào (1.5) ta được

$$\begin{aligned} f(x^2 + 2x + 1) &= (x+1)(f(x) + f(1)) \\ \Rightarrow f(x^2) + 2f(x) + f(1) &= (x+1)f(x) + (x+1)f(1) \text{ Từ } (1.5), (1.6) \text{ suy ra} \\ \Rightarrow f(x^2) &= (x-1)f(x) + xf(1) \quad (1.6) \end{aligned}$$

$xf(x) = (x-1)f(x) + xf(1) \Rightarrow f(x) = xf(1) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thỏa mãn phương trình đã cho. Vậy hàm cần tìm là $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 7. (7,0 điểm) Một tập hợp con A có ít nhất ba phần tử của tập các số nguyên dương được gọi là tập ‘**rời rạc**’ nếu với 3 phần tử phân biệt a, b, c của A thì a không là bội của $(b; c)$, với (x, y) là kí hiệu ước chung lớn nhất của hai số nguyên x và y . Chứng minh rằng nếu A là tập ‘**rời rạc**’ có n phần tử và $n \geq 4$ thì $\max A \geq 4(n^2 - n - 1)$, với $\max X$ là kí hiệu phần tử lớn nhất của tập hợp X .

Bổ đề 1. Cho n số nguyên dương không vượt quá $2n - 2$ thì có hai số mà số này là bội của số kia.

Chứng minh: Với mỗi số nguyên lẻ m , kí hiệu $A_m = \{2^k m, k \in \mathbb{N}, 2^k m \leq 2n - 2\}$

Do trong tập $\{1, 2, \dots, 2n - 2\}$ có $n - 1$ số lẻ nên có $n - 1$ tập dạng A_m .

Vì mỗi số nguyên dương không vượt quá $2n - 2$ đều có dạng $2^k m, k \in \mathbb{N}, m$ lẻ nên trong n số nguyên dương đã cho có hai số cùng thuộc một tập A_m nào đó, và đây là điều cần chứng minh.

Từ Bổ đề suy ra nếu trong tập A gồm n phần tử mà không có hai phần tử thỏa mãn phần tử này là bội của phần tử còn lại thì $\max A \geq 2n - 1$.

Bổ đề 2. Nếu tập A có 3 phần tử và là tập ‘**rời rạc**’ thì $\max A \geq 15$.

Thật vậy: Gọi $A = \{a, b, c\}$ là tập ‘**rời rạc**’. Khi đó có 3 ước chung lớn nhất của hai phần tử tùy ý của A là (a, b) , (b, c) , (c, a) .

Nếu (a, b) là ước của (a, c) thì c là bội của (a, b) là điều vô lí.

Vậy các phần tử (a, b) , (b, c) , (c, a) không có phần tử nào là bội của phần tử còn lại. Từ đó theo Bổ đề 1 $\Rightarrow \max\{(a, b), (b, c), (c, a)\} \geq 5$.

- Nếu $a = (a, b)$ thì suy ra b là bội của (a, c) là vô lí.

$$\text{Do } \frac{a}{(a, b)} \neq \frac{b}{(a, b)} \Rightarrow 1 < \frac{a}{(a, b)} \neq \frac{b}{(a, b)} \Rightarrow \max\left\{\frac{a}{(a, b)}, \frac{b}{(a, b)}\right\} \geq 3$$

$$\Rightarrow \max\{a, b\} \geq 3(a, b).$$

Tương tự ta có $\max\{a, c\} \geq 3(a, c)$, $\max\{b, c\} \geq 3(b, c)$.

$$\Rightarrow \max\{a, b, c\} \geq 3 \max\{(a, c), (a, b), (b, c)\} \geq 3 \cdot 5 = 15.$$

Trở lại bài toán, chúng ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 4$. Xét tập ‘**rời rạc**’ gồm 4 phần tử $A = \{a, b, c, d\}$. Theo phép chứng minh của Bổ đề 2 thì 6 ước chung lớn nhất của từng cặp 2 phần tử thuộc A là $x_1, x_2, \dots, x_6$ không có 2 phần tử nào mà phần tử này là bội của phần tử còn lại.

Từ đó theo Bổ đề 2 thì $\max\{x_1, x_2, \dots, x_6\} \geq 11$.

Đặt $T = \max\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$.

- Nếu $T \in A$ thì tồn tại số tự nhiên x khác 1 để $Tx \in A \Rightarrow Tx : (T, y), \forall y \in A$ là vô lí

- Nếu $Tx \in A$, với $x \geq 4$ thì $\max A \geq 4.11 = 44$.
 - Nếu $2T \in A, 3T \in A$ thì 2 phần tử còn lại của A phải chia hết cho 3, vì nếu $y \in A \setminus \{2T, 3T\}$ và $(3, y) = 1$ thì $(y, 3T) = (y, T)$ là ước của $2T$ là vô lí.
- Vậy A có dạng $A = \{2T, 3T, 3k, 3q\}$. Vì A là tập '**rời rạc**' nên $\{T, k, q\}$ cũng là tập '**rời rạc**', theo Bổ đề 2 thì $\max\{T, k, q\} \geq 15$, suy ra $\max A \geq 3.15 = 45 > 44$. Như vậy khẳng định đúng với $n = 4$.
- Giả sử khẳng định đúng với $n - 1$, ta cần chứng minh khẳng định đúng với n .
- Gọi A là tập '**rời rạc**' có n phần tử. Khi đó có C_n^2 ước chung lớn nhất của từng cặp 2 phần tử của A và không có phần tử nào là bội của phần tử nào.
- Gọi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}, k = C_n^2$ là tập các ước chung lớn nhất
- Khi đó theo Bổ đề 1 thì $T = \max X \geq 2k - 1 = n^2 - n - 1$
- Các lí luận hoàn toàn tương tự trường hợp $n = 4$ ta có:
- Nếu $T \in A$ thì tồn tại số tự nhiên x khác 1 để $Tx \in A \Rightarrow Tx : (T, y), \forall y \in A$ là vô lí
 - Nếu $Tx \in A$, với $x \geq 4$ thì $\max A \geq 4.(n^2 - n - 1)$ là điều phải chứng minh
 - Nếu $2T \in A, 3T \in A$ thì các phần tử còn lại của A phải chia hết cho 3, vì nếu $y \in A \setminus \{2T, 3T\}$ và $(3, y) = 1$ thì $(y, 3T) = (y, T)$ là ước của $2T$ là vô lí.
- Vậy A có dạng $A = \{2T, 3T, 3a_1, 3a_2, \dots, 3a_{n-2}\}$.
- Khi đó $\{T, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\}$ là tập '**rời rạc**', nên theo giả thiết quy nạp thì
- $$\max A \geq 3.\max\{T, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}\} \geq 3.4((n-1)^2 - (n-1) - 1)$$
- $$\geq 4(n^2 - n - 1), \forall n \geq 4 \text{ là điều phải chứng minh}$$

- - - **HẾT** - - -