

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2020 - 2021**

Môn thi: **TOÁN – BẢNG B**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 = 6x + 8$.
- b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + 5n$ chia hết cho 6.

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $x - 6 = \sqrt{6-x} - \sqrt{x-1}$
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 5x = y^3 + 5y \\ x^4 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z = 3xy$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{16z} \geq \frac{7}{8}$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ ba đỉnh A, B, C của tam giác. Gọi H là trực tâm tam giác ABC và K là trung điểm của HC .

- a) Chứng minh rằng 4 điểm E, K, D, F cùng thuộc một đường tròn.
- b) Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt DF tại M . Trên tia DE lấy điểm P sao cho $\widehat{MAP} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng MA là phân giác $\widehat{FMP}$

Câu 5 (3,0 điểm).

- a) Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a$. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$.

b) Cho đa giác đều có 2021 đỉnh, sao cho mỗi đỉnh của đa giác đó chỉ được tô bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại 3 đỉnh của đa giác đã cho là các đỉnh của một tam giác cân mà các đỉnh đó được tô cùng một màu.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – NGHỆ AN BẢNG B (2020 – 2021)

Câu 1.

a) Ta có $x^2 - y^2 = 6x + 8 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 17$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - y^2 = 17 \Leftrightarrow (x-3-y)(x-3+y) = 17$

Do 17 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-3-y=17 \\ x-3+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ a=-8 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x-3-y=-17 \\ x-3+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ a=8 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} x-3-y=1 \\ x-3+y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ a=8 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} x-3-y=-1 \\ x-3+y=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6 \\ a=-8 \end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên (x;y thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\{(12;-8), (-6;8), (12;8), (-6;-8)\}$

b) Ta có: $n^3 + 5n = (n^3 - n) + 6n = n(n-1)(n+1) + 6n$

Do $n(n-1)(n+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow n(n-1)(n+1) : 6$

Mà $6n : 6$, từ đó suy ra: $[n(n-1)(n+1) + 6n] : 6 \Rightarrow (n^3 + 5n) : 6$

Câu 2.

a) Điều kiện: $1 \leq x \leq 6$

Phương trình đã cho tương đương với $x-6 + \sqrt{x-1} - \sqrt{6-x} = 0$

$\Leftrightarrow (x-5) + (\sqrt{x-1} - 2) + (1 - \sqrt{6-x}) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

Do $1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} > 0, \forall x \in [1; 6]$

Vậy: $x=5$

b) Ta có: $x^3 + 5x = y^3 + 5y \Leftrightarrow (x^3 - y^3) + 5(x - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+5)=0$$

$$\Leftrightarrow x=y$$

$$\text{Do } x^2+xy+y^2+5>0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Với } x=y, \text{ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được: } x^4+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=1 \text{ vì } x^2+2>0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Câu 3.

$$\text{Ta có: } 3xy = x^2 + y^2 + z \geq 2xy + z \Rightarrow xy \geq z$$

Suy ra:

$$\frac{x^3+y^3}{16z} = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{16z} \geq \frac{(x+y)xy}{16z} \geq \frac{x+y}{16} \quad (1)$$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} = \frac{x^2}{xy+xz} + \frac{y^2}{xy+yz} \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)} \geq \frac{(x+y)^2}{xy(2+x+y)} \geq \frac{4}{2+x+y} \quad (2)$$

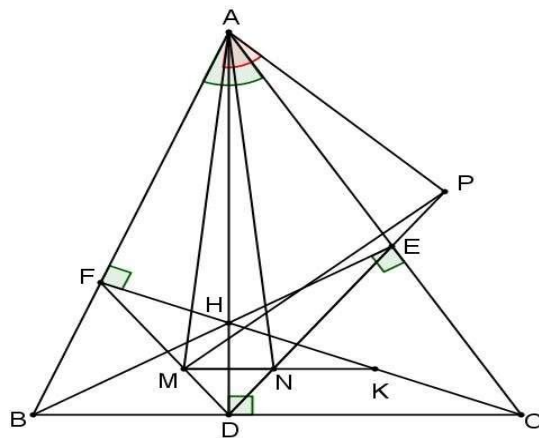
Từ (1) và (2) ta có:

$$P \geq \frac{4}{x+y+2} + \frac{x+y}{16}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{x+y+2} + \frac{x+y+2}{16} - \frac{1}{8} \geq 2\sqrt{\frac{4}{x+y+2} \cdot \frac{x+y+2}{16}} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{7}{8} \Leftrightarrow x=y=3, z=9$$

Câu 4.



$$\text{a) +) Do EK là trung tuyến của tam giác vuông EHC} \Rightarrow KE = KC \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{ECK}$$

$$\Rightarrow \widehat{EKF} = \widehat{KCE} + \widehat{KEC} = 2\widehat{ECK} \quad (1)$$

+) Do tứ giác nội tiếp HDCE $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EDH}$

+) Do tứ giác nội tiếp FECB $\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{EBH}$

+) Do tứ giác nội tiếp FBDH $\Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{FDH}$

Từ đó suy ra: $\widehat{FDE} = \widehat{FDH} + \widehat{EDH} = 2\widehat{EDH} = 2\widehat{ECK}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FDE} = \widehat{EKF}$. Do đó: tứ giác FDKE nội tiếp hay 4 điểm F,D,K,E cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi N là giao điểm của MK và DE

Ta có:

$MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{BDN} = \widehat{MNE}$ (3)

ABDE là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BDE} + \widehat{BAE} = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{MNP} + \widehat{MAP} = 180^\circ$

Do đó: MNPA là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{AMP} = \widehat{ANP}$ (5)

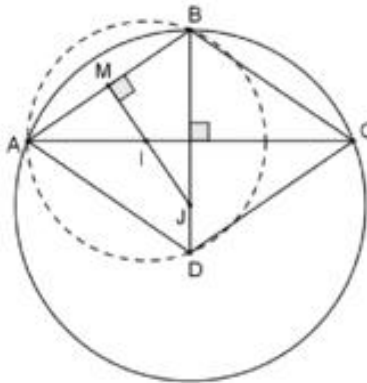
Lại có: $\triangle AMD = \triangle AND(c.g.c) \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AND} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{AMD} = 180^\circ - \widehat{AND}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $\widehat{AMP} = \widehat{AMF}$

Do đó MA là phân giác của $\widehat{FMP}$

Câu 5.

a)



Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD lần lượt tại I, J. Khi đó I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC.

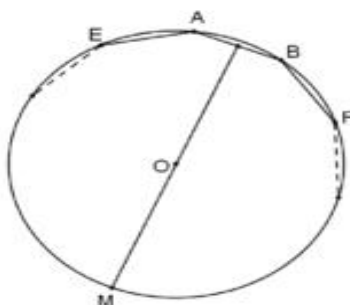
Dễ thấy: $\triangle MAI \sim \triangle MJB(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{AI} = \frac{MJ}{JB} \Rightarrow \frac{MA}{R_2} = \frac{MJ}{R_1}$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{MJ^2}{R_1^2} \Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} = \frac{JB^2 - MB^2}{R_1^2} = \frac{R_1^2 - MB^2}{R_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{R_2^2} + \frac{MB^2}{R_1^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{4R_2^2} + \frac{a^2}{4R_1^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{4}{a^2}$$

b)



Do đa giác đã cho là đa giác đều nên đa giác đó nội tiếp đường tròn tâm O.

Do 2021 là số lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau tô cùng màu. Giả sử 2 đỉnh đó là A và B và cùng được tô màu đỏ.

Cũng do đa giác đã cho đều và có số đỉnh lẻ nên tồn tại đỉnh M của đa giác nằm trên trung trực đoạn AB

$\Rightarrow \triangle MAB$ cân.

Ta xét hai khả năng xảy ra:

+) Khả năng 1: Nếu tô màu đỏ $\Rightarrow$ đpcm.

+) Khả năng 2: Nếu M tô màu xanh.

Gọi E, F là các đỉnh kề của A và B có: $EA = AB = BF \Rightarrow EF \parallel AB \Rightarrow \triangle MEF$ cân tại M. Khi đó:

Nếu E, F màu xanh thì $\triangle MEF$ cân và thỏa mãn bài toán

Nếu một trong hai đỉnh E, F màu đỏ, giả sử E màu đỏ thì $\triangle EAB$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy luôn tồn tại 3 đỉnh của đa giác đều đã cho lập nên một tam giác cân có các đỉnh cùng màu