

Bài 1. (5,0 điểm)

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}.$$

Bài 2. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình $2(x^3 - x) = y^3 - y$.

b) Cho 2020 tập hợp mà mỗi tập chứa đúng 45 phần tử. Biết rằng hai tập tùy ý trong các tập này đều có đúng một phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại phần tử thuộc tất cả 2020 tập hợp đã cho.

Bài 3. (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn và M là điểm chính giữa cung BC . Gọi I, J, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB, BC, CA ; X là giao điểm của BK và AJ ; L là giao điểm của CX và IJ . Vẽ tia Jy vuông góc với MK cắt AL tại T . Chứng minh rằng CT vuông góc với IM .

Bài 4. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) + f(xy) = x + y + xy \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}^+.$$

HẾT.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.